

Titre: Traitement de la dégénérescence en optimisation non linéaire
Title:

Auteur: Zoumana Coulibaly
Author:

Date: 2012

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Coulibaly, Z. (2012). Traitement de la dégénérescence en optimisation non linéaire [Ph.D. thesis, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.
Citation: <https://publications.polymtl.ca/956/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/956/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: Dominique Orban
Advisors:

Programme: Mathématiques de l'ingénieur
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

TRAITEMENT DE LA DÉGÉNÉRESCENCE EN OPTIMISATION
NON LINÉAIRE

ZOUMANA COULIBALY

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR
(MATHÉMATIQUES DE L'INGÉNIEUR)

AOÛT 2012

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

TRAITEMENT DE LA DÉGÉNÉRESCENCE EN
OPTIMISATION NON LINÉAIRE

présentée par : COULIBALY, Zoumana

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. ANJOS Miguel F., Ph.D., président

M. ORBAN Dominique, Doct. Sc., membre et directeur de recherche

M. AUDET Charles, Ph.D., membre

M. DUSSAULT Jean-Pierre, Ph.D., membre

A mes parents . . .

REMERCIEMENTS

Cette thèse de doctorat est le fruit de quelques quatre années de recherche en optimisation non linéaire, essentiellement au GERAD, ainsi qu'à l'École Polytechnique de Montréal.

Je remercie le GERAD pour les possibilités et les facilités de recherche qu'il met à la disposition de ces membres.

Cette thèse n'aurait sans doute pas été ce qu'elle est devenue sans la présence de mon directeur de recherche, Dominique Orban, dont l'expertise, l'ouverture d'esprit, la patience et la disponibilité m'ont permis d'explorer cet important domaine de l'optimisation non linéaire, avec passion. Pour ces aides multiformes, aussi bien scientifique que financière, qu'il retrouve par cette modeste contribution à une meilleure compréhension de la dégénérescence, l'expression de ma très profonde gratitude.

Je remercie également le département de Mathématiques et Génie Industriel de l'École Polytechnique, pour l'aide financière dont j'ai pu bénéficier au bout de deux années et demi, ainsi que les possibilités d'enseignement qui m'ont été offertes. Cette expérience enrichissante en enseignement, dans un environnement convivial, constitue à n'en point douter un plus pour ma formation en mathématiques de l'ingénieur.

Ma gratitude toute particulière à l'endroit des Professeurs Miguel Anjos, en tant que président, Jean-Pierre Dussault et Charles Audet qui me font l'honneur de d'accepter de faire partie de mon jury de soutenance.

Je ne saurais terminer, sans un mot à l'endroit de mes collègues de bureau, et amis pour certains, qui de par leur soutien et sympathie, ont contribué à leur manière à l'aboutissement de ce travail. Mes cordiaux remerciements à tous mes collègues et amis de bureau pour le bon temps passé ensemble.

RÉSUMÉ

L'objet de cette thèse est l'étude de deux types de dégénérescence en optimisation non linéaire. Dans le chapitre 3 de la thèse, nous proposons un algorithme de points intérieurs et de région de confiance pour résoudre une reformulation élastique de la pénalisation exacte ℓ_1 des problèmes mathématiques avec contraintes de complémentarité (MPCC). La nouveauté avec notre approche est qu'il n'est pas nécessaire de connaître à l'avance quelles contraintes sont de complémentarité. La force de notre approche est qu'elle traite de la même manière les problèmes dégénérés structurés que sont les MPCC et les problèmes dégénérés généraux. Notre approche adapte celle de Gould *et al.* (2010) aux MPCC en isolant la dégénérescence due aux contraintes de complémentarité. L'algorithme converge vers des points fortement stationnaires ou délivre le cas échéant un certificat de dégénérescence sans recourir à une condition du second ordre. Des résultats numériques préliminaires sur une collection de problèmes MPCC standard illustrent la flexibilité de l'approche.

Un autre type de dégénérescence qui nous intéresse est le manque de la complémentarité stricte en optimisation non linéaire. Nous définissons au chapitre 4 une mise à jour appropriée et peu onéreuse des multiplicateurs de Lagrange associés à des contraintes faiblement actives afin de recouvrer la convergence superlinéaire des itérés pour des méthodes de points intérieurs.

Enfin dans le chapitre 5, nous assemblons une collection de problèmes ayant des contraintes non strictement complémentaires. Un banc d'essais entre les solveurs de points intérieurs IPOPT2 (version en Fortran) (Wächter et Biegler, 2006), KNITRO (Waltz et Plantenga, 2006) et LOQO (Vanderbei, 2008) permet de comparer leur performance sur la collection de problèmes faiblement actifs. Notre approche de mise à jour duale est implémentée dans IPOPT2.

ABSTRACT

This thesis is dedicated to solving two classes of degenerate nonlinear programming problems. In chapter 3 of the thesis, we propose an interior-point algorithm based on an elastic formulation of the ℓ_1 penalty merit function to solve mathematical problems with complementarity constraints (MPCC). The salient feature of our method is that it requires no prior knowledge of which constraints, if any, are complementarity constraints. Remarkably, the method allows for a unified treatment of both general, unstructured, degenerate problems and structured degenerate problems, such as problems with complementarity constraints, with no changes to accommodate one class or the other. Our results refine those of Gould *et al.* (2010) by isolating the degeneracy due to the complementarity constraints. The method naturally converges to a strongly stationary point or delivers a relevant certificate of degeneracy without recourse to second-order intermediate solutions. Preliminary numerical results on a standard test set illustrate the flexibility of the approach.

Another type of degeneracy of interest is the lack of strict complementarity for nonlinear problems. We show in chapter 4 that when the strict complementarity condition fails to hold at a local solution, an appropriate and cheap scaling of the Lagrange multipliers estimates allows to recover superlinear convergence in interior-point methods.

Finally, in chapter 5 of the thesis, we collect a set of weakly-active problems and present a benchmark against others interior-point algorithms such as IPOPT2 (Fortran version) (Wächter et Biegler, 2006), KNITRO (Waltz et Plantenga, 2006) and LOQO (Vanderbei, 2008). Our approach was implemented as a modification of IPOPT2.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iii
REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vi
TABLE DES MATIÈRES	ix
LISTE DES TABLEAUX	x
LISTE DES FIGURES	xi
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 Problèmes avec contraintes de complémentarité	3
1.2 Le manque de complémentarité stricte	4
1.3 Une collection de problèmes faiblement actifs	7
1.4 Éléments de la problématique	8
1.4.1 Problèmes avec contraintes de complémentarité	8
1.4.2 Accélération de la convergence locale en l'absence de complémentarité stricte	15
1.4.3 Collection de problèmes d'optimisation non linéaire faiblement actifs . .	17
1.5 Objectifs de recherche	18
1.6 Plan de la thèse	18
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE	19
2.1 Problèmes mathématiques avec contraintes de complémentarité	19
2.1.1 Notions de stationnarité pour les MPCC	19
2.2 Problèmes faiblement actifs	24
CHAPITRE 3 RÉOLUTION DE PROBLÈMES MATHÉMATIQUES AVEC CONTRAINTES	

DE COMPLÉMENTARITÉ PAR UNE MÉTHODE DE POINTS-INTÉRIEURS ÉLASTIQUE ℓ_1	28
3.1 Introduction	28
3.1.1 Notations	31
3.1.2 Hypothèses et résultats de base	31
3.2 L'approche élastique S- ℓ_1 -QP	35
3.3 L'algorithme de points intérieurs primal-dual	39
3.4 Convergence globale	46
3.5 Implémentation et résultats numériques	53
3.6 Discussion	60
CHAPITRE 4 CONVERGENCE SUPERLINÉAIRE DES SUITES D'ITÉRÉS DES MÉTHODES DE POINTS INTÉRIEURS EN L'ABSENCE DE LA COMPLÉMENTARITÉ STRICTE	62
4.1 Introduction	63
4.1.1 Notation	67
4.1.2 Résultats préliminaires	68
4.2 De nouveaux ensembles de multiplicateurs	77
4.3 Convergence superlinéaire	81
4.4 Illustration numérique	88
4.5 Discussion	91
CHAPITRE 5 UNE COLLECTION DE PROBLÈMES NON STRICTEMENT COMPLÉMENTAIRES : TESTS NUMÉRIQUES COMPARATIFS ENTRE IPOPT, KNITRO ET LOQO	92
5.1 Introduction	92
5.2 Détection numérique des contraintes faiblement actives	94
5.2.1 Sensibilité de la détection numérique	95
5.3 La collection de problèmes faiblement actifs	98
5.3.1 Problèmes faiblement actifs réguliers	98
5.3.2 Problèmes faiblement actifs irréguliers	125
5.4 Performance des solveurs sur les problèmes faiblement actifs	128
5.5 Résultats numériques sur des problèmes de la collection CUTE(r)	134
5.6 Conclusion	137
CHAPITRE 6 CONCLUSION	139
6.1 Synthèse des travaux	139

6.2	Limitations des solutions proposées	140
6.3	Améliorations futures	141
LISTE DES RÉFÉRENCES		143

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1	Résultats sur des problèmes ayant des points faiblement stationnaires, avec la formulation avec desc égalités (3.1).	57
Tableau 3.2	Résultats sur des problèmes ayant des points faiblement stationnaires, avec la formulation n'ayant que des inégalités (3.2).	58
Tableau 3.3	Échecs de la formulation avec des inégalités (3.2) et la stratégie 1. . . .	60
Tableau 5.1	Détection numérique de la complémentarité stricte avec FILTER, KNITRO-Active et SNOPT	97
Tableau 5.2	Récapitulatif des résultats des tests numériques	129
Tableau 5.3	Comparaison entre IPOPT2, KNITRO et LOQO sur des problèmes faiblement actifs de la collection CUTE(r)	136

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Reformulations élastiques : avec égalité (gauche) et avec inégalité (droite).	14
Figure 3.1	Profils de performance pour (3.1) (gauche) et (3.2) (droite) en terme du nombre d'évaluations de l'objectif.	58
Figure 3.2	Profils de performances comparant l'algorithme 3.3.1 avec la formulation (3.1) et la Stratégie 1, et la relaxation de DeMiguel <i>et al.</i> (2005), en terme de nombre d'évaluations de l'objectif.	61
Figure 4.1	Schématisation de la mise à l'échelle duale	63
Figure 5.1	Profils de performance pour KNITRO, IPOPT2, IPOPT2 _{nsc} et LOQO pour le nombre d'itérations.	134
Figure 5.2	Profils de performance pour KNITRO, IPOPT2, IPOPT2 _{nsc} et LOQO pour le nombre d'itérations.	137

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'étude de la dégénérescence en optimisation non linéaire, plus précisément, pour les méthodes de points intérieurs. Soit le problème d'optimisation non linéaire général

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimiser}} \quad f(x) \quad \text{sujet à} \quad c_i(x) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1.1)$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions deux fois continûment différentiables. Pour définir un algorithme de points intérieurs, nous avons besoin de la notion de fonction barrière. Fiacco et McCormick (1990) définissent une fonction barrière $I(x)$ pour le problème (1.1) comme une fonction continue pour tout point strictement réalisable $c_i(x) > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$ et qui tend vers l'infini lorsque l'on approche la frontière (ou le bord) du domaine réalisable, à partir de l'intérieur du domaine, c'est-à-dire $I(x) \rightarrow \infty$ si $c(x) \rightarrow 0^+$. Nous utiliserons principalement la fonction barrière logarithmique, définie par $I(x) = -\sum_{i=1}^m \log[c_i(x)]$. La méthode de points intérieurs résout alors une suite de problèmes sans contraintes,

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n, c(x) > 0}{\text{minimiser}} \quad \phi^B(x, \mu) = f(x) - \mu I(x) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^p \log[c_i(x)], \quad (1.2)$$

itérativement pour des valeurs du paramètre barrière $\mu > 0$ de plus en plus petites. En notant $x(\mu)$ une solution du problème barrière (1.2), on nomme l'ensemble

$$\mathcal{C} := \{x(\mu), \mu > 0\}, \quad (1.3)$$

la *trajectoire centrale primale* du problème barrière (1.2). Pour démarrer, l'algorithme de points intérieurs a besoin d'un point strictement réalisable ; il va sans dire que cet ensemble ne doit donc pas avoir un intérieur strict vide pour pouvoir appliquer ce type de méthode. Si x^* est une solution du problème non linéaire (1.1), strictement complémentaire, c'est-à-dire $c_i(x^*) + y_i^* > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, pour au moins un multiplicateur de Lagrange y^* associé aux contraintes $c(x) \geq 0$ et où les conditions suffisantes d'optimalité du second ordre sont satisfaites, alors pour tout paramètre $\mu > 0$, le problème (1.2) admet localement une solution unique $x(\mu)$, et la trajectoire centrale constituée de ces solutions tend vers la solution du problème (1.1). De même, la trajectoire centrale duale $\frac{\mu}{c_i(x(\mu))}$ converge vers un multiplicateur

de Lagrange y_i^* correspondant à la contrainte $c_i(x) \geq 0$.

Dans le chapitre 3, nous traitons des problèmes avec contraintes de complémentarité, où il est connu que l'intérieur strict du domaine réalisable est vide. Cette donnée exclut à priori l'usage d'une méthode de points intérieurs. Par une technique de reformulation élastique, on élargit l'ensemble réalisable et le problème relaxé possède de biens meilleures propriétés. On résout ce dernier problème par un algorithme de points intérieurs primal-dual.

Dans le chapitre 4 de cette thèse, nous nous attaquons à un autre type de dégénérescence, le manque de complémentarité stricte pour les problèmes non linéaires. En effet Wright et Orban (2002) ont montré que lorsque la complémentarité stricte n'est pas satisfaite à la solution du problème (1.1), c'est-à-dire $c_i(x^*) = 0 = y_i^*$ pour au moins un i , la trajectoire centrale approche la solution tangentiellement à certaines contraintes actives. Comme conséquence la région des points qui satisfont le critère d'arrêt du système de KKT perturbé rétrécit au voisinage de la solution. Ainsi, pour passer d'un itéré au suivant, on doit faire plus d'une itération interne pour chaque valeur du paramètre barrière μ . Il s'en suit une détérioration de la vitesse de convergence locale des méthodes de points intérieurs lorsque la solution est non strictement complémentaire. Dans le meilleur des cas, en présence de problèmes non strictement complémentaires, Potra (2001) établit que la convergence de la suite d'itérés générés par des algorithmes de points intérieurs est au plus superlinéaire pour le problème de complémentarité linéaire dégénéré. En pratique, on observe que les algorithmes de points intérieurs atteignent un taux de convergence linéaire sur les problèmes non strictement complémentaires généraux. Dans notre approche, avec l'aide d'une mise à l'échelle simple et peu onéreuse des multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes faiblement actives, nous recouvrons un taux de convergence superlinéaire des variables primales-duales. Notre approche est implémentée dans l'algorithme de points intérieurs IPOPT2 (Wächter et Biegler, 2006).

Dans la dernière partie de la thèse, nous testons la robustesse de notre approche d'accélération de la convergence locale pour les algorithmes de points intérieurs. Pour ce faire nous avons rassemblé une collection de problèmes avec des contraintes faiblement actives. Ces problèmes test nous servent à valider notre approche de mise à jour des variables duales, en comparant nos résultats avec ceux d'autres algorithmes de points intérieurs comme KNITRO (Waltz et Plantenga, 2006) et LOQO (Vanderbei, 2008). Les problèmes faiblement actifs de cette collection viennent de diverses sources, notamment les collections de problèmes non linéaires telles CUTE(r) (Bongartz *et al.*, 1995; Gould *et al.*, 2003) et de la littérature sur l'optimisation non linéaire.

1.1 Problèmes avec contraintes de complémentarité

Les problèmes mathématiques avec contraintes de complémentarité sont des problèmes qui se distinguent par la présence en leur sein de contraintes de type

$$\min \{x, y\} = 0,$$

où le minimum est pris ici composante par composante. Ce type de contraintes est dit *de complémentarité* (ou *d'équilibre*) et se rencontre dans un très large spectre de domaines allant de l'ingénierie (problèmes de structures, de contact, ou de semi-conducteur, en passant par l'optimisation (conditions d'optimalité de programmes mathématiques avec contraintes d'inégalité, problèmes bi-niveaux, ...), la théorie des jeux (problèmes d'équilibre de Nash) à l'économie (équilibre des marchés économiques) (Ferris et Pang, 1997). C'est donc dire toute l'importance de disposer d'algorithmes globalement convergents efficaces pour la résolution de ce type de problème. En optimisation non linéaire, on recherche les points critiques d'un problème mathématique donné parmi les points qui satisfont les conditions d'optimalité du premier ordre (ou conditions de Karush- Kuhn-Tucker (KKT)). En effet, il est connu que sous la satisfaction d'une condition de qualification idoine (condition de qualification de base, condition de qualification de Mangasarian et Fromovitz (MFCQ), condition de qualification d'indépendance linéaire (LICQ) ou la condition de qualification de Slater dans le cas convexe), les conditions de KKT sont des conditions nécessaires d'optimalité.

Malheureusement, en présence de contraintes de complémentarité, aucune de ces conditions de qualification n'est satisfaite. Par conséquent, l'ensemble réalisable est d'intérieur strict vide : en effet on ne peut avoir en même temps $x_i > 0$, $y_i > 0$ et $x_i y_i = 0$. Les conditions de KKT ne sont plus d'une grande aide, car elles ne sont nécessaires pour l'optimalité que si une condition de qualification est vérifiée. Pour résoudre les problèmes avec contraintes de complémentarité, certains logiciels d'optimisation non linéaire tels que LOQO et IPOPT incorporent des modes « complémentaires », à activer en présence de contraintes de complémentarité. De notre point de vue, cette approche ne résout que partiellement le problème et nous nous demandons s'il n'était pas possible de concevoir un algorithme général, qui résout ce type de problème sans connaissance préalable de la présence de contraintes de complémentarité. Cette question a trouvé un début de réponse quand nous nous sommes intéressés au concept de variables élastiques formalisé par Gould *et al.* (2010) dans le cadre de problèmes d'optimisation classiques, sans complémentarité. Détaillons notre approche de reformulation élastique sur le MPCC ci-dessous

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \quad \text{sujet à} \quad \min\{x_1, x_2\} = 0, \quad (1.4)$$

dont la solution optimale est $x^* = (0, 0)$. En reformulant la contrainte de complémentarité $\min\{x_1, x_2\} = 0$ par $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ et $x_1x_2 \leq 0$ (ou $x_1x_2 = 0$), il est immédiat que la condition de qualification de Mangasarian et Fromowitz (MFCQ) n'est pas satisfaite en x^* . En effet le gradient de la contrainte active $x_1x_2 = 0$ est nul : $\nabla(x_1x_2)|_{x=x^*} = (0, 0)$. Le problème pénalisé ℓ_1 correspondant à (1.4) avec une formulation égalité est

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad x_1 + x_2 + \nu|x_1x_2| + \nu(\max\{0, -x_1\} + \max\{0, -x_2\}),$$

où ν est un paramètre de pénalité. Ce dernier n'étant pas différentiable, Gould *et al.* (2010) lui associent la formulation élastique

$$\begin{aligned} &\underset{x_1, x_2, s}{\text{minimiser}} && x_1 + x_2 + \nu(s_1 + s_2 + x_1x_2 + 2s_3), \\ &\text{sujet à} && x_1 + s_1 \geq 0, \quad s_1 \geq 0, \\ & && x_2 + s_2 \geq 0, \quad s_2 \geq 0, \\ & && x_1x_2 + s_3 \geq 0, \quad s_3 \geq 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

En effet, le terme $\nu|x_1x_2|$ peut être réécrite comme

$$\nu(x_1x_2 + 2s_3) \text{ et } x_1x_2 + 2s_3 \geq 0, \quad s_3 \geq 0$$

et $\nu \max\{0, -x_1\}$ par

$$\nu s_1 \text{ et } x_1 + s_1 \geq 0, \quad s_1 \geq 0.$$

Tout point admissible du problème élastique (1.5) satisfait la MFCQ. De plus l'intérieur strict de l'ensemble admissible de (1.5) est non vide. On peut désormais envisager de résoudre le problème régulier (1.5), en termes de conditions de qualification, par tout algorithme d'optimisation non linéaire, comme par exemple les méthodes de points intérieurs réputées pour leur efficacité. C'est cette approche novatrice que nous développons dans le chapitre 3 pour résoudre les problèmes mathématiques avec contraintes de complémentarité.

1.2 Le manque de complémentarité stricte

Considérons à nouveau le problème (1.1) et x un de ses point réalisables. L'ensemble des contraintes actives au point x est $\mathcal{A}(x) := \{i = 1, \dots, m \mid c_i(x) = 0\}$. Si x satisfait une

condition de qualification, alors les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

$$\nabla f(x) - J(x)^T y = 0, \quad (1.6a)$$

$$C(x)y = 0, \quad (1.6b)$$

$$(c(x), y) \geq 0, \quad (1.6c)$$

où $J(x) = \nabla c(x)^T$ et $C(x) = \text{diag}(c(x))$ est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les composantes de $c(x)$, sont des conditions nécessaires d'optimalité pour x . La condition de *complémentarité stricte* stipule que $c_i(x) + y_i > 0$ pour toute contrainte active et pour au moins un des multiplicateurs de Lagrange correspondant à x . Une contrainte est non strictement complémentaire au point x si $c_i(x) = 0 = y_i$, pour toute contrainte active au point x et tout multiplicateur correspondant. Il est courant de supposer la satisfaction de la complémentarité stricte en optimisation non linéaire. En effet, cette hypothèse confère des propriétés de régularité à la matrice du système de Newton et est aussi gage d'une convergence locale rapide. On parle ici de convergence locale, quand on est dans un voisinage assez proche d'une solution, par opposition à la convergence globale, qui concerne la convergence de l'algorithme vers une solution du problème sans égard pour le point de départ. Il est établi qu'en l'absence de complémentarité stricte, la convergence des variables primales-duales, (x, y) vers la solution est au mieux linéaire alors que cette convergence est quadratique pour les problèmes strictement complémentaires. Le manque de complémentarité stricte a un autre penchant négatif, qui est de rendre la matrice du système de Newton mal conditionnée, cette matrice étant singulière à la limite. Dans le cas des méthodes de points intérieurs, l'absence de la complémentarité stricte se traduit géométriquement par le fait que les itérés approchent la solution tangentiellement à certaines contraintes strictement complémentaires, comme l'ont montré Wright et Orban (2002). De ce fait, les rayons des régions qui renferment les points qui satisfont le critère d'arrêt du système de KKT rétrécissent au voisinage de la solution. Ceci nécessite, pour un paramètre barrière donné, plus d'une itération et anéantit du même coup tout espoir de convergence superlinéaire. Pour les problèmes de complémentarité linéaire monotones, (Monteiro et Wright, 1994; El-Bakry *et al.*, 1996) établissent la convergence superlinéaire de l'écart de complémentarité de la suite d'itérés générés par des méthodes de points intérieurs et Potra (2001) montre la convergence superlinéaire des itérés. Dans le chapitre 4 de notre thèse, avec l'aide d'une mise à jour peu onéreuse des multiplicateurs non strictement complémentaires, nous récupérons un taux de convergence locale superlinéaire pour une méthode de points intérieurs primale-duale.

Pour illustrer nos propos, considérons l'exemple canonique suivant

$$\underset{x \in \mathbb{R}}{\text{minimiser}} \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad \text{sujet à} \quad x \geq 0, \quad (1.7)$$

dont la solution optimale est donnée par $x^* = 0$ et le multiplicateur de Lagrange correspondant est $y^* = 0$. La contrainte de qualification d'indépendance linéaire (LICQ) est satisfaite en ce point. En effet le gradient de l'unique contrainte qui y est active est non nul. L'unique contrainte de ce problème $x \geq 0$ est alors faiblement active en $x^* = 0$. Nous reportons ci-dessous la sortie du solveur d'optimisation non linéaire IPOPT (Interior Point OPTimization, Wächter et Biegler (2006)) qui utilise un algorithme de points intérieurs sur le problème (1.7).

This program contains IPOPT, a program for large-scale nonlinear optimization.

IPOPT is released as open source under the Common Public License (CPL).

For more information visit www.coin-or.org/Ipop

ITER	ERR	MU	C	D	ALFA(X)	#LS	F	Regu
0	.100D+01d	.100D+00	.100D-01	.000D+00	.000D+00	0	0.00000000D+00	.000D+00
0	.100D+01d	.200D-01	.100D-01	.000D+00	.000D+00	0	-.33087225D-23	.000D+00
1	.191D-01c	.200D-01	.347D-17	.356D-01	.100D+01h	1	0.44113263D-03	.000D+00
2	.120D-02c	.294D-02	.000D+00	.490D-01	.100D+01f	1	0.20712039D-02	.000D+00
3	.953D-03c	.169D-03	.000D+00	.437D-01	.100D+01f	1	0.56093810D-03	.000D+00
4	.279D-03c	.240D-05	.000D+00	.236D-01	.100D+01f	1	0.14083476D-03	.000D+00
5	.692D-04c	.240D-05	.000D+00	.118D-01	.100D+01f	1	0.35810781D-04	.000D+00
6	.167D-04c	.240D-05	.000D+00	.578D-02	.100D+01f	1	0.95622835D-05	.000D+00
7	.478D-05c	.423D-08	.000D+00	.309D-02	.100D+01f	1	0.23916224D-05	.000D+00
8	.119D-05c	.423D-08	.000D+00	.155D-02	.100D+01f	1	0.59896011D-06	.000D+00
9	.297D-06c	.423D-08	.000D+00	.771D-03	.100D+01f	1	0.15079729D-06	.000D+00
10	.733D-07c	.423D-08	.000D+00	.383D-03	.100D+01f	1	0.38762795D-07	.000D+00
11	.173D-07c	.423D-08	.000D+00	.186D-03	.100D+01f	1	0.10775896D-07	.000D+00
12	.516D-08c	.455D-09	.000D+00	.102D-03	.100D+01f	1	0.28086173D-08	.000D+00

On reconnaît dans ce tableau à la colonne 1 l'indice d'itération et à la colonne 2 la valeur du résidu dans le test d'arrêt. La colonne 3 contient les valeurs du paramètre barrière μ tandis que dans la colonne 7, on observe le nombre de recherche linéaire effectué et dans la colonne 8, on trouve la valeur de l'objectif. Comme on peut le voir, avec les répétitions des valeurs de μ dans la colonne 3, pour chacune des petites valeurs du paramètre de pénalité, IPOPT prend plus d'une itération interne. Ce comportement numérique est typique d'un algorithme à convergence locale lente, linéaire au mieux. Ce comportement est commun aux algorithmes de points intérieurs sur des problèmes non strictement complémentaires.

Avec notre stratégie d'accélération de la convergence locale, voyons à présent les sorties de IPOPT sur le même problème.

ITER	ERR	MU	C	D	ALFA(X)	#LS	F	Regu
0	.100D+01d	.100D+00	.100D-01	.000D+00	.000D+00	0	0.00000000D+00	.000D+00
0	.100D+01d	.200D-01	.100D-01	.000D+00	.000D+00	0	-.33087225D-23	.000D+00
1	.191D-01c	.200D-01	.347D-17	.356D-01	.100D+01h	1	0.44113263D-03	.000D+00
2	.343D-02c	<i>.294D-02</i>	.139D-16	.709D-01	.100D+01f	1	0.31845692D-02	.000D+00
3	.125D-03c	<i>.169D-03</i>	.000D+00	.886D-01	.100D+01f	1	0.14694891D-03	.000D+00
4	.140D-05c	<i>.240D-05</i>	.000D+00	.215D-01	.100D+01f	1	0.19000940D-05	.000D+00
5	.227D-08c	<i>.423D-08</i>	.000D+00	.264D-02	.100D+01f	1	0.32502084D-08	.000D+00

Le fait saillant dans ce nouveau tableau est que pour les valeurs finales du paramètre barrière μ , à la colonne 3, IPOPT ne prend plus qu'une seule itération interne pour chaque petite valeur de μ . Comme conséquence, le nombre total d'itérations s'en trouve réduit et une convergence locale superlinéaire a lieu comme le révèle les données de la colonne 2. Ce qui n'est pas dans le cas des données de la colonne 2 du tableau précédent. C'est forts de cette observation numérique que nous avons décidé d'approfondir nos investigations sur ce type de problèmes. Ces investigations théoriques constituent la partie charnière du chapitre 4 de notre thèse qui a trait à l'obtention d'une convergence superlinéaire des itérés pour les méthodes de points intérieurs en présence de contraintes non strictement complémentaires.

1.3 Une collection de problèmes faiblement actifs

Dans le but de comparer les performances de notre stratégie d'accélération de la convergence locale des itérés, nous avons rassemblé une collection de problèmes test. Ces problèmes viennent des collections déjà existantes et de la littérature sur l'optimisation non linéaire. En fait cette collection répond au besoin qui s'est posé de disposer d'ensemble de problèmes faiblement actifs pour tester notre approche sur les méthodes de points intérieurs. Nous avons alors constaté que parmi toutes les collections de problèmes tests en optimisation, aucune n'était spécifiquement dédiée aux problèmes faiblement actifs, ou tout au moins désignée comme telle. L'objectif de cette collection, dans un premier temps est de disposer de problèmes test afin de comparer les performances de notre approche, et dans un second temps d'ébaucher une collection de problèmes faiblement actifs, qui nous l'espérons s'étoffera au fil du temps. Cette collection est disponible en ligne à l'adresse www.gerad.ca/~zocou/nscprob.html. Le dernier chapitre 5 détaille donc les démarches de l'assemblage de cette ébauche : de l'identification numérique des problèmes faiblement actifs au test de comparaison avec des solveurs de points intérieurs tels que IPOPT, KNITRO et LOQO.

1.4 Éléments de la problématique

Dans cette section, nous détaillons la problématique liée aux deux principaux types de dégénérescence traités dans cette thèse.

1.4.1 Problèmes avec contraintes de complémentarité

Débutons par un bref rappel des conditions d'optimalité du premier ordre pour un programme non linéaire général avec des contraintes d'égalité et d'inégalité.

Rappels de programmation non linéaire

Soit le programme non linéaire :

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimiser}} f(x) \quad \text{sujet à } h(x) = 0, \quad g(x) \geq 0, \quad (\text{NLP})$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ sont des fonctions continûment différentiables. Soit $\mathcal{F} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0, g(x) \geq 0\}$, l'ensemble réalisable de (NLP).

Les conditions de qualification sont des hypothèses qui permettent de caractériser les ensembles géométriques que sont les cônes tangent et normal associés à un point admissible du problème (NLP) et de donner une forme analytique des conditions d'optimalité du premier ordre. Dans un voisinage d'un point admissible où une condition de qualification est satisfaite, l'ensemble admissible et son approximation linéaire coïncident.

Définition 1.4.1 *Pour $x \in \mathcal{F}$, la contrainte $g_j(x)$, $j \in 1, \dots, p$ est active en x si $g_j(x) = 0$. L'ensemble des contraintes actives en x est noté $\mathcal{A}(x) = \{j \in 1, \dots, p \mid g_j(x) = 0\}$.*

Définition 1.4.2 (CQ de base) *Soit $x \in \mathcal{F}$ et l'ensemble $\Lambda(x) = \{(\mu, \lambda) \mid \mu \in \mathbb{R}^m, \lambda \in \mathbb{R}_+^p, \lambda_j \geq 0 \text{ si } j \in \mathcal{A}(x) \text{ et } \lambda_j = 0 \text{ si } j \notin \mathcal{A}(x)\}$. La condition de qualification de base (CQ de base) est vérifiée en x si et seulement si le seul $(\mu, \lambda) \in \Lambda(x)$ tel que $\sum_{i=1}^m \mu_i \nabla h_i(x) - \sum_{j \in \mathcal{A}(x)} \lambda_j \nabla g_j(x) = 0$ est $(\mu, \lambda) = (0, 0)$.*

Définition 1.4.3 (LICQ) *Nous dirons que la condition de qualification d'indépendance linéaire, ou LICQ, est satisfaite au point x admissible pour (NLP) si et seulement si les vecteurs $\{\nabla h_i(x), i = 1, \dots, m\} \cup \{\nabla g_j(x), j \in \mathcal{A}(x)\}$ sont linéairement indépendants.*

Définition 1.4.4 (MFCQ) *La condition de qualification des contraintes de Mangasarian et Fromovitz, ou MFCQ, est satisfaite au point x admissible pour (NLP) si et seulement si*
i) *les vecteurs $\{\nabla h_i(x), i = 1, \dots, m\}$ sont linéairement indépendants et*

- ii) il existe une direction $d \neq 0$ dans \mathbb{R}^n telle que $\nabla h_i(x)^T d = 0$ pour tout $i = 1, \dots, m$ et $\nabla g_j(x)^T d < 0$ pour tout j dans $\mathcal{A}(x^*)$.

Notons également la condition de qualification suivante, plus contraignante que la MFCQ, mais qui a des propriétés plus intéressantes que cette dernière. Notons

$\mathcal{A}^S = \{i \in \mathcal{A}(x) : \lambda_i > 0\}$, l'ensemble des contraintes fortement actives en x où λ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes $c(x) \geq 0$.

Définition 1.4.5 (SMFCQ) La condition de qualification des contraintes de Mangasarian et Fromovitz stricte, ou SMFCQ, est satisfaite au point x admissible pour le problème (NLP) si et seulement si

- i) les vecteurs $\{\nabla h_i(x), i = 1, \dots, m\} \cup \{\nabla g_i(x), i \in \mathcal{A}^S\}$ sont linéairement indépendants et
- ii) il existe une direction d dans \mathbb{R}^n telle que $\nabla h_i(x)^T d = 0, \forall i = 1, \dots, m$, $\nabla g_i(x)^T d = 0, \forall i \in \mathcal{A}^S$ et $\nabla g_i(x)^T d < 0, \forall i \in \{\mathcal{A}(x) \mid \lambda_i = 0\}$.

Le diagramme suivant résume les relations entre les différentes conditions de qualification

$$\boxed{\text{LICQ} \implies \text{SMFCQ} \implies \text{MFCQ} \iff \text{CQ de base}}.$$

Avec ces définitions, nous pouvons énoncer maintenant les conditions d'optimalité du premier ordre ou conditions de Karush, Kuhn et Tucker (KKT). On associe au problème (NLP) la fonction lagrangienne

$$\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} \text{ avec } \mathcal{L}(x, \mu, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \mu_i h_i(x) - \sum_{j=1}^p \lambda_j g_j(x).$$

Théorème 1.4.6 Soit $x \in \mathcal{F}$ un point admissible de (NLP) où la contrainte de qualification de base est vérifiée. Si x est un minimum local du problème (NLP) alors il existe des multiplicateurs (μ, λ) dans $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ tels que

$$\nabla_x \mathcal{L}(x, \mu, \lambda) = \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla h_i(x) - \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla g_j(x) = 0, \quad (1.8a)$$

$$\lambda \in \mathbb{R}_+^p, \mu \in \mathbb{R}^m, \quad (1.8b)$$

$$\lambda_j g_j(x) = 0, \forall j = 1, \dots, p, \quad (1.8c)$$

$$h(x) = 0, g(x) \geq 0. \quad (1.8d)$$

Ces propriétés nous permettent de caractériser l'ensemble des multiplicateurs de Lagrange associés au point x admissible pour (NLP). Notons, pour ce faire, $\Lambda(x) = \{(\lambda, \mu) \text{ qui vérifient les conditions (1.8a)-(1.8d)}\}$, l'ensemble des multiplicateurs de Lagrange associés à x . On a alors le résultat suivant

Théorème 1.4.7 *Soit x un point qui vérifie les conditions de KKT du premier ordre. Si la LICQ est satisfaite en x alors l'ensemble des multiplicateurs de Lagrange associés à x est réduit à un point $\Lambda(x) = \{(\lambda, \mu)\}$.*

Ce résultat donne l'existence et l'unicité des multiplicateurs de Lagrange associés à x dans le cas où la LICQ est satisfaite en x . Un résultat plus fort, qui aboutit aux mêmes conclusions que le théorème 1.4.7 mais avec une hypothèse plus légère, est donné par le théorème suivant

Théorème 1.4.8 (Kyparisis (1985)) *Supposons que x vérifie les conditions de KKT du premier ordre. La MFCQ est satisfaite en x si et seulement l'ensemble des multiplicateurs de Lagrange associés à x est réduit à un singleton $\Lambda(x) = \{(\lambda, \mu)\}$.*

Enfin, le théorème suivant, dû à J. Gauvin, ancien professeur au département de Mathématiques et Génie Industriel (MAGI) de l'École Polytechnique, donne les conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'un ensemble de multiplicateurs de Lagrange non vide et compact.

Théorème 1.4.9 (Gauvin (1977)) *Soit x un minimum local du programme (NLP). L'ensemble $\Lambda(x)$ est non vide et borné si et seulement si la condition de qualification de Mangasarian-Fromovitz (MFCQ) est vérifiée en x .*

Position du Problème

Après avoir rappelé dans le paragraphe précédent les notions d'optimalité pour un programme non linéaire, nous allons ici énoncer quelques inconvénients liés aux MPCC et qui font qu'il n'est pas judicieux de les résoudre directement par des méthodes d'optimisation non linéaires classiques. Le premier inconvénient est d'ordre géométrique : les MPCCs ont des ensembles admissibles non convexes d'intérieur strict vide. En effet, considérons la contrainte de complémentarité simple en dimension deux, $\min \{x, y\} = 0$ dont l'ensemble admissible est $\mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, xy = 0\}$. Cet ensemble est non convexe et dépourvu d'intérieur strict ($x > 0$ et $y > 0$).

Le second inconvénient et à nos yeux le plus important, est la non régularité de l'ensemble admissible d'un MPCC en terme de conditions de qualification. En effet, considérons, pour

simplifier, le MPCC avec seulement des contraintes de complémentarité écrites sous la forme d'égalité

$$\underset{x}{\text{minimiser}} \ f(x) \quad (1.9a)$$

$$\text{sujet à } F_i(x) \geq 0, \ \forall i \in I = \{1 \dots p\} \quad (1.9b)$$

$$G_i(x) \geq 0, \ \forall i \in I \quad (1.9c)$$

$$F_i(x)G_i(x) = 0, \ \forall i \in I. \quad (1.9d)$$

Sous cette forme, aucun point admissible du MPCC (1.9) ne vérifie la condition de qualification de Mangasarian-Fromovitz (MFCQ). En effet d'après la définition (1.4.4), si un point admissible de (1.9) x vérifiait la MFCQ, les conditions suivantes seraient satisfaites :

- (i) Les vecteurs $\{\nabla(F_i G_i)(x) = F_i(x)\nabla G_i(x) + G_i(x)\nabla F_i(x) : i \in I\}$ sont linéairement indépendants et
- (ii) il existe un vecteur $d \in \mathbb{R}^p$, $d \neq 0$ tel que

$$\nabla F_i(x)^T d > 0, \text{ pour } i \in \mathcal{A}_F(x) \text{ et } \nabla G_j(x)^T d > 0, \text{ pour } j \in \mathcal{A}_G(x), \quad (1.10a)$$

$$\nabla(F_i G_i)(x)^T d = F_i(x)\nabla G_i(x)^T d + G_i(x)\nabla F_i(x)^T d = 0, \text{ pour } i \in I, \quad (1.10b)$$

où $\mathcal{A}_F(x) = \{i \in I \mid F_i(x) = 0\}$ et $\mathcal{A}_G(x) = \{i \in I \mid G_i(x) = 0\}$ sont les ensembles de contraintes actives en x et $\mathcal{A}_F(x) \cup \mathcal{A}_G(x) = I$. Soit x un point admissible de (1.9) et soit i dans I . Supposons que x satisfait la MFCQ, alors

- soit $i \in \mathcal{A}_F(x) \cap \mathcal{A}_G(x) \Rightarrow F_i(x) = 0 = G_i(x)$ et dans ce cas $\nabla(F_i G_i)(x) = 0$ et le vecteur nul appartient à l'ensemble des gradients des contraintes actives en x qui ne peuvent par conséquent pas être linéairement indépendants. La condition (i) n'est pas donc pas satisfaite en ce point.
- soit $i \in \mathcal{A}_F(x) \setminus \mathcal{A}_G(x)$, c'est à dire que $F_i(x) = 0 < G_i(x)$: ici la condition (1.10a) donne d'une part $\nabla F_i(x)^T d > 0$ et d'autre part, (1.10b) entraîne $\nabla(F_i G_i)(x)^T d = G_i(x)\nabla F_i(x)^T d = 0$. Mais puisque $0 < G_i(x)$ alors on déduit de (1.10b) que $\nabla F_i(x)^T d = 0$, contradictoire à (1.10a). Par conséquent, x ne vérifie pas les conditions (1.10).
- soit $i \in \mathcal{A}_G(x) \setminus \mathcal{A}_F(x)$ et $G_i(x) = 0 < F_i(x)$: dans ce cas, tout comme précédemment, on aboutit à la conclusion que x ne satisfait pas les conditions (1.10).

Il s'en suit alors qu'aucun point admissible de (1.9) ne peut satisfaire à la MFCQ.

Par conséquent, tout point admissible d'un MPCC a un ensemble de multiplicateurs de Lagrange non borné, si non vide, en vertu du théorème (1.4.9).

Ceci pose un vrai problème car les logiciels de résolution de programmes non linéaires sont

élaborés justement pour trouver des points admissibles qui vérifient les conditions de KKT, qui combinées à une condition de qualification adéquate donnent les conditions nécessaires d'optimalité. Ainsi, en l'absence de condition de qualification, les conditions de KKT ne sont plus d'une grande utilité, car ces conditions ne sont nécessaires pour l'optimalité que si une condition de qualification est satisfaite.

Notons que les conclusions précédentes demeurent vraies si on remplace le MPEC (1.9) par son équivalent dans lequel les contraintes de complémentarité sont réécrites sous forme d'inégalités.

Il a donc fallu adapter de nouvelles méthodes de résolution pour ces problèmes, vu l'intérêt grandissant dont ils font l'objet de nos jours et leur importance dans plusieurs domaines aussi bien scientifiques qu'industriels. Les problèmes mathématiques avec contraintes de complémentarité (ou d'équilibre) se rencontrent dans des domaines aussi variés que

- l'économie : problèmes d'équilibre du trafic, problèmes d'équilibre de Nash en théorie des jeux, problèmes de tarification dans les réseaux de transport,... (Ferris et Pang, 1997)
- l'ingénierie : problèmes de contact ou de design de structures en mécanique, problèmes de design de semi-conducteurs en électronique (Anjos et Vannelli, 2006), processus de fabrication en chimie, ...
- l'optimisation multi-niveaux (Audet *et al.*, 1997).

Un exemple de problème bi-niveau est le problème de tarification (Colson *et al.*, 2005). Dans ce problème, le meneur (le gestionnaire du réseau) a pour objectif de maximiser son revenu de taxation, à l'inverse du suiveur (l'utilisateur du réseau) qui lui cherche plutôt à minimiser son coût de déplacement dans le réseau :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underset{x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m}{\text{maximiser}} & Tx, \\ \text{sujet à} & \underset{y \in \mathbb{R}^m}{\text{minimiser}} \quad (c + T)x + dy, \\ & Ax + By \geq s. \end{array} \right. , \quad (1.11)$$

où A, B sont des matrices et c, d, s et y des vecteurs. Vue la grande complexité de ces problèmes (NP-difficiles), on a recours à de nouvelles stratégies de résolution. Une de ces stratégies, dans le cas où le problème du suiveur est convexe, consiste à remplacer ce dernier problème par ses conditions d'optimalité. Le problème résultant contient des contraintes de complémentarité issues des conditions de complémentarité liées aux contraintes d'inégalité

du problème suiveur

$$\begin{aligned}
& \underset{x, y, \lambda}{\text{maximiser}} && Tx, \\
& \text{sujet à} && B^T \lambda = d, \\
& && Ax + By - s \geq 0, \quad \lambda \geq 0, \\
& && \lambda(Ax + By - s) = 0.
\end{aligned}$$

Très récemment de nouvelles méthodes de résolution de programmes mathématiques non linéaires, notamment les *méthodes élastiques* ont fait leur apparition. Ces méthodes de par leur conception semblent donner bon espoir quant à la prise en compte des contraintes de complémentarité dans un programme non linéaire. En effet l'introduction de variables élastiques transforme le MPCC en une suite de problèmes qui vérifient la MFCQ et qui ont donc un ensemble admissible d'intérieur strict non vide, sur lesquels l'application d'une méthode de points intérieurs est envisageable. Une fonction de pénalité pour un problème d'optimisation est une fonction nulle pour tout point admissible du problème et strictement positive à l'extérieur de l'ensemble admissible.

Les deux fonctions de pénalité les plus courantes sont la pénalisation exacte ℓ_1 , qui pour le problème (1.9) est donné par

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= \|F(x)^-\|_1 + \|G(x)^-\|_1 + \|FG(x)\|_1 \\
&= \sum_{i \in I} [\max \{0, -F_i(x)\} + \max \{0, -G_i(x)\} + |F_i(x)G_i(x)|],
\end{aligned} \tag{1.12}$$

associée à la norme ℓ_1 , et la pénalisation exacte associée à la norme ℓ_∞ s'écrit

$$P_\infty(x) = \|F(x)^-\|_\infty + \|G(x)^-\|_\infty + \|FG(x)\|_\infty, \tag{1.13}$$

où $FG(x)$ désigne le vecteur $\{F_i(x)G_i(x), i \in I\}$.

Notre approche pour résoudre ces problèmes s'inspire du concept de variables élastiques développés pour le cas de problèmes sans contraintes de complémentarité par Gould *et al.* (2010). L'idée principale de cette approche est de relaxer le problème reformulé par ajout de variables élastiques. Dans notre approche, nous utilisons une pénalisation ℓ_1 . La pénalisation exacte ℓ_1 du problème (1.9)

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimiser}} \quad f(x) + \nu \sum_{i=1}^p [\max \{0, -F_i(x)\} + \max \{0, -G_i(x)\} + |F_i(x)G_i(x)|]$$

n'est pas différentiable aux points situés à la frontière de l'ensemble admissible. C'est à ce

niveau qu'interviennent les variables élastiques, afin de donner une formulation différentiable équivalente du problème pénalisé. Tout nombre réel a peut s'écrire comme $a = a^+ - a^-$ où $a^+ = \max\{0, a\} \geq 0$ et $a^- = \max\{0, -a\} \geq 0$ sont respectivement les parties positive et négative de a . Il en découle que $|a| = a^+ + a^- = a + 2a^-$, avec $a^+ = a + a^- \geq 0$. En vertu de ces propriétés, on lisse le problème de pénalité en le problème élastique

$$\begin{aligned}
& \underset{x \in \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{R}^{3p}}{\text{minimiser}} && f(x) + \nu \sum_{i=1}^p s_{1i} + s_{2i} + 2(F_i(x)G_i(x) + s_{3i}) \\
& \text{sujet à} && F(x) + s_1 \geq 0, \quad s_1 \geq 0, \\
& && G(x) + s_2 \geq 0, \quad s_2 \geq 0, \\
& && F_i(x)G_i(x) + s_{3i} \geq 0, \quad s_{3i} \geq 0, \quad i = 1, \dots, p
\end{aligned} \tag{1.14}$$

où ν est un paramètre de pénalité positif et (s_1, s_2, s_3) est le vecteur des variables élastiques. Tout point admissible du problème élastique satisfait la MFCQ et l'intérieur strict de l'en-

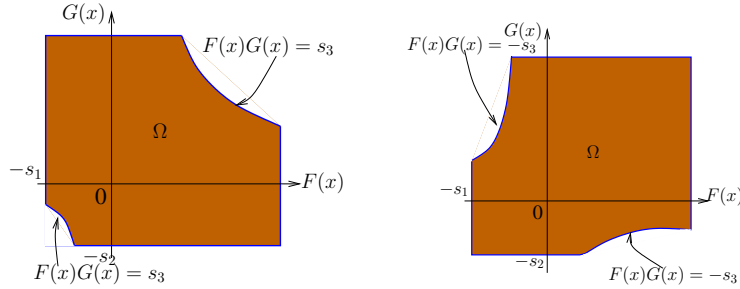


Figure 1.1 Reformulations élastiques : avec égalité (gauche) et avec inégalité (droite).

semble admissible est non vide (figure 1.1). On le résout par une méthode de points intérieurs primale-duale.

L'algorithme élastique ainsi construit, implémenté en python, sous NLPy (Orban, 2012), nous permet de résoudre à optimalité plus de 80% des problèmes de la collection McMPEC de Leyffer (2004). En outre, l'algorithme élastique est peu coûteux en ce sens que nous ne faisons usage d'aucune condition du second ordre. Un autre mérite de notre algorithme est qu'il ne dispose d'aucun mode « complémentaire », à activer en présence de problèmes de complémentarité, comme c'est le cas pour la plupart des algorithmes actuels à même de résoudre ce type de problèmes. Enfin, en cas de non convergence, l'algorithme délivre des informations sur la régularité du point réalisable obtenu et si ce point n'est pas réalisable alors il est un point stationnaire pour l'infaisabilité de la pénalisation ℓ_1 .

1.4.2 Accélération de la convergence locale en l'absence de complémentarité stricte

Il est utile ici de rappeler la notion de convergence Q-superlinéaire (Potra, 2001).

Définition 1.4.10 *La suite $\{x_n\}$ de nombre réels et positifs est*

1. *Q-linéairement convergente si $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$.*
2. *Q-linéairement convergente avec un taux de convergence global de $\rho < 1$ si $x_{n+1} < \rho x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
3. *Q-superlinéairement convergente si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 0$.*

Pour illustrer la problématique de ce thème, rappelons brièvement le processus de résolution par une méthode de points intérieurs du problème non linéaire (avec seulement des contraintes d'inégalité, par soucis de concision) suivant :

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimiser}} f(x) \quad \text{sujet à} \quad c(x) \geq 0, \quad (1.15)$$

où les fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont continûment différentiables.

Si x est une solution locale du problème (1.15) qui vérifie une condition de qualification, par exemple la MFCQ, alors il existe des multiplicateurs y tels que les conditions d'optimalité du premier ordre (ou conditions de KKT) sont satisfaites

$$g(x) - J(x)^T y = 0, \quad (1.16a)$$

$$c(x) \geq 0 \text{ et } y \geq 0, \quad (1.16b)$$

$$C(x)Y e = 0, \quad (1.16c)$$

où $e = (1, 1, \dots, 1)$, $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_x f(x)$ est le gradient de l'objectif et $J(x) \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_x c(x)$, est la matrice Jacobienne des contraintes. $C(x)$ et Y sont les matrices diagonales $C(x) = \text{diag}(c(x))$ et $Y = \text{diag}(y)$.

Dans ces équations, (1.16c) revêt un caractère particulier : cette condition est dite condition de complémentarité. Dans ce contexte, une contrainte est fortement active (ou strictement complémentaire) si pour chaque i , il existe un multiplicateur $y_i \geq 0$ tel que $c_i(x) + y_i > 0$ et faiblement active (ou non strictement complémentaire) si pour tout i et tous les multiplicateurs de Lagrange associés à x , on a $c_i(x) = 0 = y_i$.

Les méthodes primale-duales cherchent plutôt à résoudre le système de KKT perturbé obtenu en remplaçant le second membre de la contrainte de complémentarité (1.16c) par μe ,

où $\mu \downarrow 0$ est le paramètre barrière

$$g(x) - J^T(x)y = 0, \quad C(x)Ye = \mu e, \quad (c(x), y) > 0. \quad (1.17)$$

Le système perturbé (1.17) est ensuite résolu par une méthode de type Newton. Si on note la matrice hessienne de la fonction de Lagrange $L(x, y) := f(x) - y^T c(x)$ associée à (1.15), $H(x, y) = \nabla_{xx}f(x) - \sum_{i=1}^m y_i \nabla_{xx}c_i(x)$, alors le pas de Newton $(\Delta x, \Delta y)$ est solution du système symétrique suivant

$$\begin{bmatrix} H(x, y) & J(x)^T \\ J(x) & -C(x)Y^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ -\Delta y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} g(x) - J(x)^T y \\ c(x) - \mu Y^{-1} e \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

Il est immédiat que dans le cas de contraintes faiblement actives, la matrice du système précédent est mal posée puisque le bloc diagonal $-C(x)Y^{-1}$ est indéfini à la solution : en effet $c(x^k) \rightarrow 0$ et $y^k \rightarrow 0$. Comme conséquence, le système (1.18) est numériquement difficile à résoudre.

Un autre inconvénient lié au manque de complémentarité stricte est la convergence lente observée pour les algorithmes de points intérieurs. En effet, il est connu qu'en l'absence de la complémentarité stricte, le taux de convergence local des méthodes de points intérieurs est au plus linéaire alors que ce taux est quadratique dans le cas strictement complémentaire. En l'absence de la complémentarité stricte, on sait que $\|x^k - x^*\|^2 = O(\mu_k)$ alors que $\|x^k - x^*\| = O(\mu_k)$ (cas strictement complémentaire). De plus les solutions locales des problèmes barrière correspondant au problème perturbé (1.17), approchent la solution tangentiellement aux contraintes fortement actives. Le rayon de la région qui concentre les solutions approchées du système de KKT perturbé rétrécit rapidement. Ainsi pour passer d'une telle région à la région correspondante à l'itération suivante, on a besoin de prendre plus d'un pas de Newton. Cette situation exclut tout espoir de convergence rapide, car typiquement pour ce faire, on devrait avoir une itération interne pour chaque paramètre μ .

L'objectif de notre approche est de remédier à cette faible convergence locale en proposant un mécanisme d'accélération de la convergence locale pour des méthodes de points intérieurs sur les problèmes faiblement actifs et où la condition de qualification linéaire (LICQ) est satisfaite à la solution.

Un défi à relever à ce niveau est de prouver l'existence de la trajectoire centrale. En effet en l'absence de la complémentarité stricte, l'existence de la trajectoire centrale, dans le cas de problèmes généraux (ni convexes, ni quadratiques) n'est à notre connaissance pas prouvée. Wright et Orban (2002) ont prouvé que pour chaque μ , le système perturbé (1.17) admet toujours une (unique) solution locale. En se basant sur ce résultat et l'hypothèse de la LICQ,

nous pensons qu'il est possible de joindre ces différents minima locaux entre eux de manière à engendrer une trajectoire centrale lisse. Cette conjecture pourra constituer un bon point de départ d'un thème de recherche futur.

Notre approche consiste à mettre à l'échelle les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes faiblement actives. Ainsi, nous n'aurons qu'une itération interne pour chaque valeur de μ , nous permettant d'atteindre un taux de convergence superlinéaire.

1.4.3 Collection de problèmes d'optimisation non linéaire faiblement actifs

Afin de tester les performances de notre approche d'accélération de la convergence locale, nous avons besoin d'une collection de problèmes non strictement complémentaires. Il existe en optimisation non linéaire de célèbres collections de problèmes test telles que celles de Hock et Schittkowski (1981), Schittkowski (1987), Bongartz *et al.* (1995); Gould *et al.* (2003), Moré *et al.* (1981) ou encore Leyffer (2004), entre autres, mais aucune de ces collections n'est spécifiquement dédiée aux problèmes faiblement actifs. Pour les besoins de nos tests, nous avons commencé à rassembler à partir des collections existantes et des livres et articles en optimisation non linéaire de tels problèmes. À toute fin d'utilité, nous avons jugé bon de rendre disponible cette ébauche de collection en ligne afin de susciter des collaborations entre personnes intéressées par ce sujet, dans le but d'enrichir et de densifier cette collection naissante. Le fruit de cette recherche est disponible aux adresses électroniques suivantes github.com/zocou/Strictly-complementarity et www.gerad.ca/~zocou/nscprob.html.

Concrètement, nous avons écrit un code sous AMPL pour détecter les contraintes faiblement actives, notamment toute contrainte vérifiant $c_i(x) \leq \text{tol}$ et $y_i \leq \text{tol}$ à la solution x , où tol désigne la précision désirée. En pratique $\text{tol} = 10^{-5}$ et le test porte aussi bien sur les contraintes d'inégalité générales que les contraintes de bornes sur les variables. Nous avons observé que les algorithmes de points intérieurs détectaient peu ou très difficilement les contraintes faiblement actives. Pour remédier à cette situation, nous avons opté pour SNOPT (Gill *et al.*, 2005), un algorithme de type SQP qui utilise une méthode de contraintes actives et qui identifie mieux les-dites contraintes.

Pour certains problèmes nous avons procédé à une vérification théorique des résultats numériques du code AMPL. Nous avons aussi divisé les problèmes en deux groupes : ceux dits réguliers qui satisfont la LICQ, et ceux dits non réguliers qui ne satisfont pas la LICQ. Pour ces derniers nous tentons de déterminer s'ils satisfont la MFCQ ou non.

Par ailleurs nous comparons nos résultats à ceux obtenus par les solveurs de points intérieurs KNITRO de Waltz et Plantenga (2006) et LOQO de Vanderbei (2008). Les résultats de ce « banc d'essais » ainsi que la collection de problèmes faiblement actifs font l'objet du

chapitre 5 de la thèse.

1.5 Objectifs de recherche

Dans le chapitre 3, l'objectif de la recherche est la conception d'un algorithme général à même de traiter indistinctement des contraintes de complémentarité comme des contraintes usuelles par le biais d'une méthode élastique ℓ_1 doublée d'une méthode de points intérieurs. L'efficacité et la robustesse de l'algorithme sont testées sur la collection de problèmes avec contraintes de complémentarité de la collection MacMPEC de Leyffer (2004).

Le chapitre 4 de la thèse a trait à l'accélération de la convergence locale des algorithmes de points intérieurs en l'absence de la complémentarité stricte. Nous donnons des résultats théoriques attestant de la convergence superlinéaire de notre approche et des tests numériques sur des problèmes faiblement actifs viendront confirmer les performances pratiques de notre algorithme.

La nécessité de disposer d'une collection de problèmes test pour valider notre processus d'accélération de la convergence locale pour les problèmes non strictement complémentaires nous a amené à examiner l'existence de telles collections. Nous avons alors constaté l'inexistence d'une collection spécifiquement dédiées aux problèmes non strictement complémentaires, quand bien même on trouve des problèmes faiblement actifs éparpillés dans les différentes collections. Cet état de fait nous a motivé à poser les jalons d'une base de problèmes faiblement actifs, qui nous l'espérons passera à la postérité, en s'étoffant avec l'apport de toutes les bonnes volontés intéressées par ce type de problème. Ce processus d'assemblage est décrit dans le chapitre 5 de la thèse.

1.6 Plan de la thèse

Le plan de la thèse s'établit comme suit : la première partie sera constituée d'une introduction dans laquelle on retrouvera les problématiques des trois thèmes ainsi que la revue de littérature se rapportant à ces thèmes.

Dans la seconde partie du document, on trouve le développement des trois thèmes mentionnés plus haut, développés aux chapitres 3–5. Cette partie témoigne de notre contribution personnelle à la résolution des problèmes ci-mentionnés et ont tous été rédigés en collaboration avec mon directeur de recherche, Dominique Orban, PhD et professeur au Département de Mathématiques et Génie Industriel de l'École Polytechnique de Montréal et au GERAD.

Dans la dernière partie, nous quantifions notre apport à la résolution du problème de la dégénérescence en optimisation non linéaire et dégageons des pistes de réflexion à même d'améliorer et de consolider nos diverses approches de résolution.

CHAPITRE 2

REVUE DE LITTÉRATURE

Cette partie résume l'état de l'art, en optimisation non linéaire, des sujets qui nous intéressent dans cette étude tels que les méthodes de points intérieurs, les problèmes avec contraintes de complémentarité et les problèmes faiblement actifs.

2.1 Problèmes mathématiques avec contraintes de complémentarité

La littérature sur les problèmes mathématiques avec des contraintes de complémentarité est assez fournie. Nous n'aborderons dans les lignes qui suivent que les articles pertinents à notre approche et invitons par ailleurs le lecteur intéressé à examiner les références ci-mentionnées. L'état de l'art actuel comporte trois principales approches de résolution pour les problèmes MPCC.

Nous donnons ici les nouvelles notions de stationnarité pour un MPCC telles qu'énoncées par Scheel et Scholtes (2000).

2.1.1 Notions de stationnarité pour les MPCC

Soit le problème

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimiser}} \quad f(x) \quad \text{sujet à} \quad c_{\mathcal{E}}(x) = 0, \quad c_{\mathcal{I}}(x) \geq 0, \quad \min\{F(x), G(x)\} = 0, \quad (\text{MPCC})$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $c_{\mathcal{E}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\mathcal{E}}}$, et $c_{\mathcal{I}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\mathcal{I}}}$, $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ sont deux fois continûment différentiables, \mathcal{E} et \mathcal{I} sont des ensembles d'indices avec $n_{\mathcal{E}}$ et $n_{\mathcal{I}}$ éléments, respectivement

Au point admissible x de (MPCC), est associé l'ensemble des contraintes actives $\mathcal{A}(x) = \{i \in \mathcal{I} \mid c_i(x) = 0\} \cup \mathcal{A}_F \cup \mathcal{A}_G$ avec

$$\mathcal{A}_F := \{i = 1, \dots, p \mid F_i(x) = 0\} \text{ et } \mathcal{A}_G = \{i = 1, \dots, p \mid G_i(x) = 0\}.$$

Ainsi la MPCC-LICQ (respectivement la MPCC-MFCQ, la MPCC-SMFCQ, la MPCC-CQ de base) est satisfaite au point x admissible pour (MPCC) si et si seulement la LICQ (respectivement la MFCQ, la SMFCQ, la CQ de base) usuelle est satisfaite en ce point pour les

contraintes

$$c_{\mathcal{E}}(x) = 0, \quad c_{\mathcal{I}}(x) \geq 0, \quad F(x) \geq 0, \quad G(x) \geq 0.$$

À partir du lagrangien correspondant au (MPCC)

$$\mathcal{L}(x, \lambda_{\mathcal{E}}, \lambda_{\mathcal{I}}, z^F, z^G) = f(x) - \lambda_{\mathcal{E}}^T c_{\mathcal{E}}(x) - \lambda_{\mathcal{I}}^T c_{\mathcal{I}}(x) - (z^F)^T F(x) - (z^G)^T G(x),$$

Scheel et Scholtes (2000) définissent diverses notions de stationnarité pour le (MPCC).

Définition 2.1.1 *Un point admissible x pour (MPCC) est faiblement stationnaire s'il existe des multiplicateurs $(\lambda_{\mathcal{E}}, \lambda_{\mathcal{I}}, z^F, z^G) \neq 0$ tels que*

$$\nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda_{\mathcal{E}}, \lambda_{\mathcal{I}}, z^F, z^G) = 0 \tag{2.1}$$

$$\lambda_{\mathcal{I}} C_{\mathcal{I}}(x) = 0, \tag{2.2}$$

$$z_i^F F_i(x) = 0 = z_i^G G_i(x), \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, p, \tag{2.3}$$

$$(\lambda_{\mathcal{I}}, c_{\mathcal{I}}(x)) \geq 0. \tag{2.4}$$

Définition 2.1.2 *Un point admissible x est C-stationnaire s'il est faiblement stationnaire et en plus $z_i^F z_i^G \geq 0$ pour tout indice bi-actif $i \in \mathcal{A}_F \cap \mathcal{A}_G$.*

Définition 2.1.3 *Un point admissible x est M-stationnaire s'il est faiblement stationnaire et*

$$z_i^F > 0 \text{ et } z_i^G > 0 \text{ ou bien } z_i^F z_i^G = 0, \quad \text{pour tout } i \in \mathcal{A}_F \cap \mathcal{A}_G.$$

Définition 2.1.4 *Le point admissible x est B-stationnaire s'il est faiblement stationnaire et le système obtenu en linéarisant autour de x toutes les données, exceptée la condition $F(x)G(x) = 0$ (ou $F(x)G(x) \leq 0$), admet $d = 0$ comme une solution.*

Définition 2.1.5 *Un point admissible x est fortement stationnaire s'il est faiblement stationnaire et*

$$z_i^F \geq 0, \quad z_i^G \geq 0 \text{ pour tout } i \in \mathcal{A}_F \cap \mathcal{A}_G.$$

Le diagramme ci-dessous donne les équivalences entre ces différentes notions de stationnarité Scheel et Scholtes (2000) :

$$\begin{array}{ccc} \text{B-stationnarité} & \implies & \text{Stationnarité faible} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Stationnarité forte} & \implies & \text{C-stationnarité} \end{array}$$

Ainsi un minimum local du (MPCC) qui satisfait la MPCC-MFCQ est C-stationnaire et un minimum local du (MPCC) qui satisfait la MPCC-SMFCQ est fortement stationnaire avec un vecteur de multiplicateurs uniques.

Outrata (1999) utilise les règles de calcul différentiel généralisé de Mordukovich pour établir les conditions d'optimalité pour (MPCC). Outrata (1999) définit aussi les notions de cône normal et en donne une caractérisation en termes de gradients des contraintes et énonce les conditions de qualification et d'optimalité généralisée pour (MPCC).

Compte tenu de la non régularité de l'ensemble admissible des MPCCs, les approches de résolution cherchent à rendre cet ensemble régulier en relaxant certaines des contraintes, notamment les reformulations des contraintes de complémentarité. Ainsi dans le cas d'une relaxation simple, les contraintes de complémentarité exactes sont remplacées par des contraintes de complémentarité approchées : une formulation d'égalité $F_i(x) \geq 0, G_i(x) \geq 0, F_i(x)G_i(x) = 0$ devient $F_i(x) \geq 0, G_i(x) \geq 0, F_i(x)G_i(x) = \theta$, tandis qu'une formulation d'inégalité $F_i(x) \geq 0, G_i(x) \geq 0, F_i(x)G_i(x) \leq 0$ est transformée en $F_i(x) \geq 0, G_i(x) \geq 0, F_i(x)G_i(x) \leq \theta$, où $\theta > 0$ est le paramètre de relaxation.

La relaxation avec des égalités favorise une identification plus rapide des contraintes de complémentarité actives tandis que la relaxation avec des inégalités peut s'avérer plus robuste en l'absence de conditions de qualification (Scholtes, 2001).

On peut aussi procéder à une relaxation de toutes les contraintes d'équilibre comme suit :

$$F_i(x) \geq -\delta_1, G_i(x) \geq -\delta_2, F_i(x)G_i(x) \leq \theta, \forall i = 1, \dots, p,$$

où $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ et $\theta > 0$ sont des paramètres de relaxation. Cette dernière approche, privilégiée par DeMiguel *et al.* (2005), est la plus proche de notre approche élastique, à la différence notable que nous substituons aux paramètres de relaxation des variables élastiques.

Le problème relaxé est ensuite résolu séquentiellement pour des paramètres de relaxation qui tendent vers zéro, dans l'espoir de générer des suites qui s'accumulent autour de points stationnaires du (MPCC).

Une autre méthode de régularisation a été étudiée par Facchinei *et al.* (1999) et Jiang et Ralph (2000). Jiang et Ralph (2000) remplacent la relaxation avec égalité des contraintes de complémentarité par l'équation :

$$\Phi(F_i(x), G_i(x)) = 0, \forall i \in I,$$

dans laquelle la fonction régularisante $\Phi(a, b) = \psi(a, b, 0)$ et $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, qui possède entre autres propriétés celles d'être localement lipschitzienne, différentiable en tout point (a, b, c)

avec $c \neq 0$, admet une dérivée directionnelle en tout point de \mathbb{R}^3 , et vérifie $\psi(a, b, 0) = 0 \Leftrightarrow a > 0, b > 0$ et $ab = 0$.

Une telle fonction ψ , parmi d'autres, est $\psi(a, b, c) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - (a + b)$ pour laquelle on note que $\phi(a, b) = \psi(a, b, 0) = \sqrt{a^2 + b^2} - (a + b)$ est la fonction de Fischer-Burmeister.

Facchinei *et al.* (1999) adoptent la perturbation continue suivante

$$\Phi_\mu(F_i(x), G_i(x)) = 0, \forall i \in I,$$

où $\Phi_\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction définie par $\Phi_\mu(a, b) = \sqrt{(a - b)^2 + 4\mu^2} - (a + b)$ qui possède l'importante propriété suivante (Facchinei *et al.*, 1999, Proposition 2)

$$\Phi_\mu(a, b) = 0 \Leftrightarrow a \geq 0, b \geq 0 \text{ et } ab = \mu^2, \forall \mu > 0.$$

Φ_μ est une perturbation lisse de la fonction \min : en effet $\Phi_\mu \in \mathcal{C}^\infty$ si $\mu \neq 0$ et $\Phi_0(a, b) = -2 \min \{a, b\} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \Phi_\mu(a, b)$.

Le but de ces reformulations est d'approcher le (MPCC) par une suite de problèmes d'optimisation réguliers résolus par des méthodes classiques telles que les algorithmes de programmation quadratiques séquentiels (SQP) dans l'approche de Jiang et Ralph (2000).

Anitescu (2005) utilise une méthode de pénalité ℓ_∞ pour obtenir un problème élastique

$$\begin{aligned} & \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimiser}} && f(x) + \nu\tau \\ & \text{sujet à} && c_{\mathcal{E}}(x) = 0, \quad c_{\mathcal{I}}(x) \geq 0, \\ & && F(x) \geq 0, \quad G(x) \geq 0, \quad F(x)^T G(x) \leq \tau, \quad \tau \geq 0, \end{aligned}$$

où ν est un paramètre de pénalité, qui est par la suite résolu par un algorithme de programmation quadratique séquentielle. Si le point stationnaire vérifie la MPEC-LICQ et une condition suffisante du second ordre pour les MPCC, Anitescu (2005) établit la convergence superlinéaire de la suite d'itérés vers x^* . Les méthodes de programmation quadratique séquentielle sont des méthodes de résolution de problèmes non linéaires qui à chaque itération cherchent un pas de Newton qui résout une approximation quadratique exacte ou approchée du problème relaxé. Les contraintes sont formées des linéarisations de toutes les contraintes du problème relaxé. Pour le problème (MPCC) par exemple, on détermine le pas de déplacement

d_x à l'itération k en résolvant le problème quadratique

$$\begin{aligned}
& \underset{d, d_F, d_G}{\text{minimiser}} && \nabla_x \mathcal{L}(x^k, \lambda_{\mathcal{E}}^k, \lambda_{\mathcal{I}}^k, z^k) d + \frac{1}{2} d \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(x^k, \lambda_{\mathcal{E}}^k, \lambda_{\mathcal{I}}^k, z^k) d, \\
& \text{sujet à} && c_{\mathcal{E}}(x^k) + \nabla c_{\mathcal{E}}(x^k) d \geq 0, \\
& && c_{\mathcal{I}}(x^k) + \nabla c_{\mathcal{I}}(x^k) d \geq 0, \\
& && F(x^k) + \nabla F(x^k) d_F \geq 0, \\
& && G(x^k) + \nabla G(x^k) d_G \geq 0, \\
& && F(x^k)^T G(x^k) + F(x^k)^T \nabla G(x^k) d_F + G(x^k)^T \nabla F(x^k) d_G \leq 0, \tau,
\end{aligned}$$

où $\mathcal{L}(x, \lambda_{\mathcal{E}}, \lambda_{\mathcal{I}}, z)$ est le lagrangien associé au (MPCC).

Benson *et al.* (2006) et Leyffer *et al.* (2006) utilisent une approche de pénalisation couplée avec une méthode de points intérieurs. Plus précisément, Leyffer *et al.* (2006) reportent les contraintes de complémentarité dans la fonction objectif, en y ajoutant un terme de la forme $\nu \|F(x)G(x)\|_1 = \nu \sum_{i=1}^p |F_i(x)G_i(x)|$; les contraintes d'inégalité, $F(x) \geq 0$ et $G(x) \geq 0$, restant au niveau des contraintes. Un résultat de convergence vers un point fortement stationnaire est établi si la MPCC-LICQ est satisfaite et si le paramètre de pénalisation ν est mis à jour de manière adéquate. Cette approche est assez semblable à la nôtre même s'ils ne traitent que des problèmes avec contraintes de complémentarité. Une version de cette approche adaptée aux problèmes dégénérés est décrite dans López-Calva (2005). Les auteurs soulignent en outre l'importance d'une stratégie de mise à jour adaptative du paramètre de pénalité. Comparativement à cette approche, la nôtre est plus générale car nous n'exigeons aucune condition de qualification pour le problème avec contraintes de complémentarité pour établir nos résultats.

Ralph et Wright (2004) et Scholtes (2001) relaxent les contraintes $F_i(x)G_i(x) \leq 0$, $i = 1, \dots, p$ en $F_i(x)G_i(x) \leq t$ où $t > 0$ est un paramètre de relaxation sous le contrôle de l'utilisateur. Raghunathan et Biegler (2005) adoptent une approche similaire et y adaptent une méthode de points intérieurs qui tient compte du fait qu'à la limite, l'intérieur strict du domaine relaxé est vide.

DeMiguel *et al.* (2005) proposent une double relaxation

$$F_i(x) \geq -\delta_1, \quad G_i(x) \geq -\delta_2, \quad F_i(x)G_i(x) \leq -\delta_c, \quad i = 1, \dots, p.$$

résolue par une méthode de points intérieurs. Des résultats de convergence locale sont obtenus sous une condition d'optimalité du second ordre.

Lin et Fukushima (2005) relaxent les contraintes de complémentarité du (MPCC) en

$$F_i(x)G_i(x) \leq t^2 \quad \text{et} \quad (F_i(x) + t)(G_i(x) + t) \geq t^2,$$

où t est un paramètre de pénalité. Sous l'hypothèse de la MPCC-LICQ, Lin et Fukushima (2005) établissent que toute valeur d'accumulation des points stationnaires du problème relaxé est un point B-stationnaire du (MPCC), si la matrice hessienne et le lagrangien sont inférieurement bornées pour chaque itéré.

Toutes ces relaxations transforment l'ensemble admissible de (MPCC) en un ensemble plus régulier. Kadrani *et al.* (2009) proposent la relaxation des contraintes de complémentarité du (MPCC) suivante

$$F_i(x) \geq -t, \quad G_i(x) \geq -t \quad \text{et} \quad (F_i(x) - t)(G_i(x) - t) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p,$$

où t est un paramètre de relaxation. Le paramètre de relaxation est ensuite pénalisé dans l'objectif et le problème résultant est résolu par une méthode de contraintes actives. Kadrani *et al.* (2009) établissent que tout point d'adhérence d'une suite d'itérés générés par le problème relaxé est un point M-stationnaire de (MPCC), sous l'hypothèse de la MPCC-LICQ. Si la suite d'itérés est asymptotiquement faiblement non dégénérée, c'est-à-dire que $F_i(x^k)$ et $G_i(x^k)$ tendent vers zéro à la même vitesse pour tout $i \in \mathcal{A}_F(x) \cup \mathcal{A}_G(x)$ tel que $F_i(x^k) = t \neq G_i(x^k)$ ou $G_i(x^k) = t \neq F_i(x^k)$, alors x^k converge vers un point fortement stationnaire du (MPCC) (Kadrani *et al.*, 2009).

La contribution essentielle de notre approche élastique par rapport aux autres algorithmes de relaxation se situe au niveau du relâchement des hypothèses : nous n'avons besoin d'aucune condition de qualification et encore moins d'une condition du second ordre pour établir nos résultats de convergence globale.

2.2 Problèmes faiblement actifs

Dans notre approche, nous avons besoin de détecter les contraintes faiblement actives. Cette tâche n'est pas des plus aisées, du moins numériquement, et reste un problème ouvert en optimisation non linéaire. Nous pouvons néanmoins citer les travaux de certains auteurs qui se sont attaqués au problème, notamment pour les problèmes linéaires.

La fonction qui permet d'identifier les contraintes actives d'un problème d'optimisation est nommée indicateur. Dans El-Bakry *et al.* (1994) et El-Bakry *et al.* (1996), les auteurs effectuent une revue de littérature presque exhaustive sur les différents indicateurs en optimisation linéaire ainsi que leurs propriétés de convergence.

Kanzow *et al.* (2000) ont étudié le problème d'identification des contraintes actives pour un problème non linéaire avec uniquement des contraintes d'inégalité et ce pour un point de KKT isolé. En nous inspirant de ces différentes approches, nous construisons un indicateur plus simple basé sur les valeurs de la contrainte et de la variable duale et le paramètre barrière qui nous donne des résultats satisfaisants.

Une sous-classe de problèmes non strictement complémentaires est celle des problèmes de complémentarité linéaire dégénérés. Plusieurs auteurs ont étudié le manque de complémentarité stricte pour les problèmes de complémentarité linéaire monotones. Une question fondamentale, à ce stade, est l'existence de la trajectoire centrale et ses propriétés. En effet notre approche s'intéresse au comportement des points sur et autour de cette trajectoire afin de leur donner le comportement souhaité. Cependant nonobstant l'inexistence d'une trajectoire centrale, notre analyse reste valable, car nous ne faisons référence qu'aux minima locaux du problème barrière et ces derniers existent (Wright et Orban, 2002). Pour rappel, la trajectoire centrale primale associée au problème (5.1) est l'ensemble des solutions primales, strictement réalisables, qui minimisent le problème barrière correspondant, pour tout $\mu > 0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\mu) &= \{x(\mu) \mid c(x(\mu)) > 0 \text{ et } x(\mu) \text{ minimise } f(x) - \mu \sum_{i=1}^m \log c_i(x)\}, \\ &= \bigcup_{\mu > 0} \underset{x}{\operatorname{argmin}} \{f(x) - \sum_{i=1}^m \log c_i(x), \ c(x) > 0\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Le centre analytique de l'ensemble primal optimal du problème (5.1) est le point \bar{x} , s'il existe, qui minimise $-\ln \sum_{i=1}^m c_i(x)$. On définit de la même manière le centre analytique de l'ensemble dual optimal.

Dans le cas linéaire, Megiddo (1989) et Monteiro et Adler (1989a) prouvent l'existence de la trajectoire centrale primale-duale si l'ensemble réalisable primal-dual est d'intérieur strict non vide et la LICQ est satisfaite et établissent la convergence de la suite d'itérés $(x^k, \mu_k C(x^k)^{-1}e)$ vers les centres analytiques de l'ensemble primal-dual.

En optimisation quadratique convexe, Monteiro et Adler (1989b) établissent l'existence et la convergence de la trajectoire centrale primale vers la solution optimale du problème initial, sous conditions que l'ensemble réalisable primal soit bornée, que l'ensemble réalisable dual soit d'intérieur strict non vide et que la condition de qualification de Slater soit satisfaite. Sous les mêmes hypothèses, Drummond et Svaiter (1999) étendent ce résultat aux problèmes avec objectif convexe. Dans le cas général de l'optimisation non linéaire Fiacco et McCormick (1990) d'abord et Gould *et al.* (2001) se basent sur la complémentarité stricte et la LICQ pour prouver l'existence de la trajectoire centrale et sa convergence vers la solution du problème initial. Wright et Orban (2002) relaxent la LICQ en la MFCQ, et utilisent la com-

plémentarité stricte ainsi que la condition d'optimalité suffisante du second ordre pour arriver à l'existence et à la convergence de cette trajectoire centrale vers la solution du problème de départ. McCormick et Witzgall (2001) se sont intéressés aux problèmes convexes qui ont plus d'une solution primale ou duale. En s'aidant de la condition de qualification de Slater et de la complémentarité stricte, les auteurs prouvent l'existence de la trajectoire centrale et la convergence des suites d'approximations des variables duales vers le centre analytique de l'ensemble des multiplicateurs de Lagrange optimaux, tout comme Wright et Orban (2002) qui obtiennent les mêmes résultats dans le cas non convexe.

Comme on peut le constater dans les lignes précédentes, l'existence de la trajectoire centrale est fortement corrélée à la complémentarité stricte. En l'absence de cette condition primordiale, Kojima *et al.* (1990) prouvent l'existence de la trajectoire centrale pour les problèmes de complémentarité linéaire monotones et sa convergence dans le cas linéaire vers le centre analytique de l'ensemble primal optimal. Monteiro et Tsuchiya (1996) évaluent la distance entre la solution locale du problème barrière et la solution optimale du problème initial, de l'ordre de $\Theta(\mu^{\frac{1}{2}})$ pour les problèmes de complémentarité linéaires monotones dégénérés. Wright et Orban (2002) obtiennent le même résultat pour un problème non linéaire général, mais en vertu de la MFCQ et de la condition d'optimalité suffisante du second ordre. Sous les mêmes conditions, ils établissent l'existence d'un minimum local pour chaque problème barrière. Mais l'existence et la différentiabilité de la trajectoire centrale n'est pas mentionnée. À notre connaissance c'est le plus fort résultat qui existe quant à la trajectoire centrale pour les problèmes non linéaires généraux.

Même si l'existence de la trajectoire centrale n'est pas requise dans notre approche, nous pensons néanmoins que la théorie serait plus complète si un tel résultat était obtenu. Nous donnons une piste de développement futur à ce propos dans nos conclusions.

Gould *et al.* (2001) établissent la convergence superlinéaire d'une méthode de points-intérieurs primale-duale avec un taux arbitrairement proche de deux, pour des problèmes d'optimisation généraux avec des contraintes d'égalité et d'inégalité mais qui satisfont la complémentarité stricte.

Pour les méthodes de points intérieurs qui calculent leur itérés par une méthode de type Newton $F'(w)d = -F(w)$, comme la notre, la qualité de la convergence locale en une solution non strictement complémentaire est affectée par le fait que $F'(w)$ est singulière à la solution. (Kelley, 1995, Théorème 5.1.1) établit que pour w^0 pris dans un voisinage idoine de la solution w^* qui vérifie $F'(w^*)$ et si $F'(w)$ est une fonction continue de constante de Lipschitz γ , c'est-à-dire que $\|F'(w_1) - F'(w_2)\| \leq \gamma\|w_1 - w_2\|$, alors la suite $w^{k+1} = w^k - F'(w^k)^{-1}F(w^k)$ converge quadratiquement $\rightarrow w^*$.

Des résultats de convergence qui relâchent les conditions de continuité de $F'(w)$ existent

mais l'hypothèse de non singularité de $F'(w^*)$ demeure.

Dennis et Moré (1974) donnent des conditions de convergence superlinéaire d'une méthode de type Newton $w^{k+1} = w^k - B_k^{-1}F(w^k)$, avec $B_k^{-1} \approx F'(w^k)$ des matrices non singulières, vers des solutions où la matrice $F'(w^k)$ est non singulière. Ainsi pour un point non strictement complémentaire, la matrice $F'(w)$ est singulière et ce résultat ne tient plus. En effet la matrice du système de KKT non symétrisée comme dans (1.18) s'écrit

$$F'(w) = \begin{bmatrix} H(x, y) & -J(x)^T \\ -YJ(x) & C(x) \end{bmatrix}$$

qui comporte des zéros dans les lignes associées aux contraintes non strictement complémentaires. Pour l'exemple introductif (1.7) par exemple, $\min \frac{1}{2}x^2$ sujet à $x \geq 0$, cette matrice est

$$F'(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Potra (2001) définit le problème de complémentarité linéaire comme

$$Qx + Ry = b, \quad x^T y = 0, \quad (x, y) \geq 0, \quad (2.6)$$

où $b \in \mathbb{R}^n$ et $Q, R \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ avec $[Q, R]$ de plein rang. Pour le problème (2.6) monotone ($-Q$ définie positive et $R = I$ est la matrice identité), Monteiro et Wright (1994) établissent qu'en l'absence de la complémentarité stricte, un algorithme générique de points intérieurs primal-dual inexact dont la longueur du pas tend vers un produit une suite d'itérés pour laquelle l'écart de complémentarité $(x^k)^T y^k$ tend Q-linéairement vers 0 avec un taux d'au plus $\frac{1}{4}$.

El-Bakry *et al.* (1996) montrent sous les mêmes hypothèses que la borne supérieure $\frac{1}{4}$ est atteinte pour ce type d'algorithme. Pour la convergence des itérés (x, s) pour les problèmes de complémentarité linéaires dégénérés (non strictement complémentaires), on peut citer les travaux de Potra (2001) qui donne des conditions suffisantes de convergence Q-superlinéaire des itérés générés par des algorithmes de points intérieurs. Si le paramètre barrière $\mu_k \rightarrow 0$ Q-superlinéairement avec un taux σ et si $\|(x^{k+1}, y^{k+1}) - (x^k, y^k)\| = O(\sqrt{\mu})$, alors $\{(x^k, y^k)\}$ tend vers zéro avec le même taux que μ_k .

Comme on le voit, l'essentiel des travaux réalisés sur la convergence de la suite d'itérés (x^k, y^k) des algorithmes de points intérieurs en l'absence de la complémentarité stricte l'ont été dans le contexte des problèmes de complémentarité linéaire.

CHAPITRE 3

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES MATHÉMATIQUES AVEC CONTRAINTES DE COMPLÉMENTARITÉ PAR UNE MÉTHODE DE POINTS-INTÉRIEURS ÉLASTIQUE ℓ_1

Ce chapitre a fait l'objet d'un article paru dans la revue SIAM Journal on Optimization sous la référence (Coulibaly et Orban, 2012) et a aussi donné naissance à un court article de deux pages dans le bulletin du GERAD numéro 8 de l'année 2011.

3.1 Introduction

Considérons la solution du problème mathématique avec contraintes de complémentarité

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimiser}} \ f(x) \quad \text{sujet à} \quad c_{\mathcal{E}}(x) = 0, \ c_{\mathcal{I}}(x) \geq 0, \ \min\{x_1, x_2\} = 0, \quad (\text{MPCC})$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $c_{\mathcal{E}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\mathcal{E}}}$, et $c_{\mathcal{I}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\mathcal{I}}}$ sont deux fois continûment différentiables, \mathcal{E} et \mathcal{I} sont des ensembles d'indices avec $n_{\mathcal{E}}$ et $n_{\mathcal{I}}$ éléments respectivement, et le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est partitionné en $x = (x_0, x_1, x_2)$ avec $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^p$ et $x_0 \in \mathbb{R}^{n-2p}$, $p \leq \lfloor n/2 \rfloor$. Le dernier ensemble de contraintes du problème (MPCC), à interpréter composante par composante, caractérise un problème mathématique avec contraintes de complémentarité ou MPCC en abrégé. Nous supposons implicitement qu'il n'y a pas d'autres contraintes de complémentarité dans les contraintes d'égalité classiques de (MPCC). En pratique, les contraintes de complémentarité peuvent apparaître sous une forme plus générale comme $\min\{F_1(x), F_2(x)\} = 0$. Mais il est aisé de voir que par l'ajout des variables d'écart $s_1 = F_1(x)$ et $s_2 = F_2(x)$, on se ramène à un problème de la forme (MPCC). Une difficulté majeure avec les contraintes de complémentarité est qu'elles ne sont pas différentiables, telles qu'écrites ci-dessus sous forme algébrique. Pour ce faire, on les reformule sous l'une des formes régulières équivalentes, avec des égalités et des inégalités

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \text{et} \quad X_1 x_2 = 0, \quad (3.1)$$

ou uniquement avec des inégalités

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \text{et} \quad X_1 x_2 \leq 0. \quad (3.2)$$

Dans ces expressions, X_1 désigne la matrice diagonale $p \times p$, $\text{diag}(x_1)$. Les reformulations différentiables (3.1) et (3.2) ont un défaut majeur : aucun de leurs points admissibles ne satisfait la contrainte de qualification de Mangasarian et Fromowitz (MFCQ), et par conséquent leurs ensembles réalisables respectifs sont d'intérieur strict vide. Ceci exclut d'emblée l'utilisation des puissantes méthodes de points intérieurs pour les résoudre. Le même constat demeure pour les formulations scalaires $x_1^T x_2 = 0$ ou $x_1^T x_2 \leq 0$. Nous qualifions de structurée cette forme de *dégénérescence* des MPCCs en ce sens que des solutions locales peuvent avoir des multiplicateurs de Lagrange, par opposition à une dégénérescence plus globale où l'existence de multiplicateurs de Lagrange en une solution locale n'est pas garantie.

Habituellement, pour résoudre l'irrégularité en terme de condition de qualification, on *régularise* le problème en élargissant l'ensemble admissible par l'ajout de nouveaux paramètres. Par exemple $X_1 x_2 \leq 0$ dévient $X_1 x_2 \leq t$ comme dans (Ralph et Wright, 2004; Scholtes, 2001), ou encore (3.2) est remplacée par $x_1 \geq -\delta_1$, $x_2 \geq -\delta_2$ et $X_1 x_2 \leq \theta$, où δ_1 , δ_2 et θ sont des paramètres de régularisation, comme dans (DeMiguel *et al.*, 2005). L'objectif de la régularisation est de permettre l'utilisation de puissants algorithmes d'optimisation non linéaires tels que les méthodes SQP ou les méthodes de points intérieurs. À nos yeux, l'insuffisance des algorithmes actuels pour la résolution des MPCCs est le fait qu'ils doivent disposer d'un *mode MPCC* que l'on active dès qu'on est en présence de telles contraintes.

Dans notre approche, nous proposons une reformulation élastique régulière de la fonction de pénalité ℓ_1 , décrite pour les problèmes non linéaires généraux par Gould *et al.* (2010). Il en résulte un problème régulier, avec un paramètre de pénalité $\nu > 0$, comportant uniquement des contraintes d'inégalité et de bornes. L'attrait essentiel de cette approche réside dans le fait que tous les points admissibles du problème reformulé satisfont la MFCQ. On utilise ensuite une méthode barrière logarithmique primale-duale combinée à une pénalisation ℓ_1 . On résout alors, de manière itérative, un problème sans contrainte par un algorithme de région de confiance.

Par opposition aux méthodes de régularisation décrites précédemment, nous n'utilisons pas de paramètres externes à actualiser manuellement au fil des itérations. Les sous-problèmes sont résolus en utilisant un préconditionneur approprié, qui induit une norme adaptée à la géométrie de la région de confiance. Selon Conn *et al.* (2000a), en évaluant les gradients à l'aide de la norme duale correspondante, on peut obtenir une convergence rapide par un mécanisme qui accepte des solutions inexacts durant la résolution du sous problème. Un avantage de notre approche comparée à la méthode élastique ℓ_∞ de Anitescu *et al.* (2007) est qu'il n'est pas nécessaire d'obtenir à chaque itération un point qui satisfait les conditions d'optimalité du second ordre.

Dans les sections qui suivent, nous étudions le problème élastique correspondant à (MPCC)

avec les contraintes de complémentarité reformulées en (3.1) ou (3.2). Si le paramètre de pénalité demeure borné au fil des itérations, on en déduit que le problème (MPCC) satisfait une condition de qualification appropriée — en l’occurrence la MPCC-MFCQ. En fonction de la valeur finale du paramètre de pénalité, on obtient un des résultats de convergence globale suivant, pour la suite d’itérés engendrée par l’algorithme. Le cas le plus intéressant, dans lequel le paramètre de pénalité est mis à jour un nombre fini de fois : ici toute limite de la suite d’itérés est un point *fortement stationnaire* — la forme de stationnarité la plus forte qu’on peut obtenir pour (MPCC). Dans le cas de figure où le paramètre de pénalité diverge et que les points d’adhérence de la suite d’itérés ne sont pas admissibles, alors ces points sont stationnaires pour la mesure de l’inadmissibilité ℓ_1 . Enfin si le paramètre de pénalité diverge, mais que les points d’adhérence de la suite des itérés sont admissibles pour (MPCC), alors à l’aide d’une mise à jour adéquate de ce paramètre de pénalité, l’algorithme délivre un certificat de non satisfaction de la MPCC-MFCQ.

L’algorithme élastique ℓ_1 de cet article peut être vu comme une méthode générale de résolution des problèmes dégénérés, où on entend par *dégénérescence* la non satisfaction d’une condition de qualification. Que ce soit dans le cas d’une dégénérescence *structurelle* comme (MPCC) ou dans le cas d’une dégénérescence *non structurelle* générale pour un problème non linéaire ayant des solutions locales ne satisfaisant pas la MFCQ, la méthode présentée ici, quand elle converge vers un point admissible permet d’identifier soit un minimum local, soit un point ne satisfaisant pas la MFCQ. D’après notre expérience, la dernière situation produit toujours, en pratique, une solution au problème— excepté pour les problèmes n’admettant pas de multiplicateurs de Lagrange à la solution.

Le reste du chapitre 3 est organisé comme suit. Nous discutons des notations, des conditions de qualification et du concept de stationnarité propre aux MPCCs dans le reste de la section 3.1. Dans la section 3.2, nous détaillons notre approche élastique S- ℓ_1 -QP, de même que ses propriétés régularisantes, et les conditions d’optimalité du premier ordre. Nous établissons une correspondance entre points fortement stationnaires d’un MPCC et points de KKT du problème élastique correspondant. Dans la section 3.3, nous appliquons au problème élastique une méthode de points intérieurs primale-duale, décrivons l’algorithme élastique et formulons les propriétés de convergence de l’itération interne d’une méthode de région de confiance. Les résultats de convergence globale de l’itération externe suivent à la section 3.4. Des résultats numériques sur des problèmes de la collection MacMPEC (Leyffer, 2004) sont donnés à la section 3.5. Nous terminons par une conclusion et des perspectives de développements futurs dans la section 3.6.

3.1.1 Notations

Les notations que nous utilisons dans cette partie sont standard. Pour tout vecteur x ou fonction vectorielle $c(x)$, on désigne par X et $C(x)$ les matrices diagonales $\text{diag}(x)$ et $\text{diag}(c(x))$. En partitionnant le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ comme (x_0, x_1, x_2) , on note x_{1i} la $i^{\text{ème}}$ composante de x_1 et par x_{2i} la $i^{\text{ème}}$ composante de x_2 . On définit les vecteurs unité $e_{\mathcal{E}}$ et $e_{\mathcal{I}}$, de $\mathbb{R}^{n_{\mathcal{E}}}$ et $\mathbb{R}^{n_{\mathcal{I}}}$, respectivement, dont toutes les composantes sont des un. Sauf indication contraire, $\|\cdot\|$ désignera la norme euclidienne. Pour tout vecteur $a \in \mathbb{R}^n$, la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur a^- est définie par $a_i^- \equiv \max\{0, -a_i\}$. Sous cette notation, on obtient en particulier $\|a^-\|_1 = \sum_i \max\{0, -a_i\}$.

3.1.2 Hypothèses et résultats de base

Dans toute cette partie, on suppose que les fonctions f , $c_{\mathcal{E}}$, et $c_{\mathcal{I}}$ sont deux fois continûment différentiables.

Soit le problème non linéaire générique

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimiser}} \quad f(x) \quad \text{sujet à} \quad c_{\mathcal{E}}(x) = 0, \quad c_{\mathcal{I}}(x) \geq 0, \quad (\text{NLP})$$

pouvant contenir des contraintes de types (3.1) ou (3.2), et soit x un point admissible pour (NLP). Pour les contraintes d'inégalité de (MPCC) ou celles de (NLP), notons $\mathcal{A}(x)$, l'ensemble des contraintes actives en x , c'est-à-dire,

$$\mathcal{A}(x) = \{i \in \mathcal{I} \mid c_i(x) = 0\}.$$

Le lagrangien associé à (NLP) est

$$(x, \lambda_{\mathcal{E}}, \lambda_{\mathcal{I}}) \mapsto f(x) - \lambda_{\mathcal{E}}^T c_{\mathcal{E}}(x) - \lambda_{\mathcal{I}}^T c_{\mathcal{I}}(x),$$

où $\lambda_{\mathcal{E}} \in \mathbb{R}^{n_{\mathcal{E}}}$ et $\lambda_{\mathcal{I}} \in \mathbb{R}^{n_{\mathcal{I}}}$ sont les multiplicateurs de Lagrange. Les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre, ou conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), au point $x \in \mathbb{R}^n$ stipulent l'existence de multiplicateurs de Lagrange tels que

$$\nabla f(x) - J_{\mathcal{E}}(x)^T \lambda_{\mathcal{E}} - J_{\mathcal{I}}(x)^T \lambda_{\mathcal{I}} = 0, \quad c_{\mathcal{E}}(x) = 0, \quad C_{\mathcal{I}}(x) \lambda_{\mathcal{I}} = 0, \quad (c_{\mathcal{I}}(x), \lambda_{\mathcal{I}}) \geq 0,$$

avec $J_{\mathcal{E}}(x)$ et $J_{\mathcal{I}}(x)$ les matrices Jacobiennes des contraintes $c_{\mathcal{E}}$ et $c_{\mathcal{I}}$, respectivement, évaluées au point x .

L'existence de multiplicateurs de Lagrange satisfaisant les conditions de KKT du premier ordre à la solution locale x n'est garantie que si une *condition de qualification* est satisfaite

par x .

Dans notre approche, nous n'exigeons aucune condition de qualification pour le problème (MPCC). Il est en fait facile de vérifier qu'aucun point admissible pour les contraintes (3.1) ou (3.2) ne satisfait la condition MFCQ. Par conséquent, comme on le verra plus loin, nous aurons besoin de nouvelles conditions d'optimalité pour caractériser les points stationnaires des MPCCs. Nous ne faisons aucune hypothèse sur l'ensemble réalisable de (MPCC), car nous voulons être capable de détecter des points localement inadmissibles et aussi des points stationnaires de la mesure ℓ_1 de l'inadmissibilité.

La fonction lagrangienne associée au problème (MPCC) (Scheel et Scholtes, 2000) est définie par

$$L(x, \alpha, \lambda, z) = \alpha f(x) - \lambda_{\mathcal{E}}^T c_{\mathcal{E}}(x) - \lambda_{\mathcal{I}}^T c_{\mathcal{I}}(x) - z_1^T x_1 - z_2^T x_2, \quad (3.3)$$

avec $\alpha \geq 0$, $\lambda_{\mathcal{E}} \in \mathbb{R}^{n_{\mathcal{E}}}$, $\lambda_{\mathcal{I}} \in \mathbb{R}_+^{n_{\mathcal{I}}}$, $z_1 \in \mathbb{R}_+^p$ et $z_2 \in \mathbb{R}_+^p$ des multiplicateurs de Fritz John. Si $\alpha > 0$, en divisant l'égalité précédente par α , on obtient les multiplicateurs de Lagrange. À tout point x admissible pour (MPCC), on associe les ensembles actifs

$$\mathcal{A}_1(x) = \{i = 1, \dots, p \mid x_{1i} = 0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_2(x) = \{i = 1, \dots, p \mid x_{2i} = 0\}. \quad (3.4)$$

Par soucis de concision et quand le contexte est suffisamment clair, nous écrirons simplement \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 , en lieu et place de $\mathcal{A}_1(x)$ et $\mathcal{A}_2(x)$. Observons aussi que par construction, $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \{1, \dots, p\}$. L'ensemble $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ correspond à l'ensemble des variables *bi-actives* ou des variables de *coin* tandis que son ensemble complémentaire dans $\{1, \dots, p\}$ désigne les variables de *branche*. Notons $n_{\mathcal{C}} = n_{\mathcal{E}} + n_{\mathcal{I}} + 3p$, le nombre total de contraintes du (MPCC), où les contraintes de complémentarité ont été réécrites sous l'une des formes (3.1) ou (3.2).

Nous rappelons ici la notion de condition de qualification la plus utilisée pour les (MPCC). Nous dirons que la MPCC-MFCQ est satisfaite au point x admissible pour le problème (MPCC) si et seulement si la MFCQ classique est satisfaite en x pour les contraintes

$$c_{\mathcal{E}}(x) = 0, \quad c_{\mathcal{I}}(x) \geq 0, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

L'ensemble des contraintes actives correspondant est alors $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$. Le problème (MPCC) sera dit *dégénéré* s'il admet une solution qui ne satisfait pas la MPCC-MFCQ. Une des propriétés de notre algorithme élastique est de pouvoir converger, dans un certain sens, vers ce type de solutions dégénérées tout en délivrant dans le même temps un certificat de non satisfaction de la MPCC-MFCQ.

Nous donnons ici les conditions d'optimalité de Fritz John pour les (MPCC). Ces conditions bien que plus faibles que les conditions de KKT sont plus générales, en ce sens qu'elles

sont satisfaites par toute solution, sans égard à une quelconque condition de qualification.

Lemme 3.1.1 (Scheel et Scholtes (2000)) *Si x est une solution du problème (MPCC), alors il existe des multiplicateurs de Fritz John $(\alpha, \lambda_{\mathcal{E}}, \lambda_{\mathcal{I}}, z_1, z_2) \neq 0$ tels que*

$$\alpha \nabla f(x) - J_{\mathcal{E}}(x)^T \lambda_{\mathcal{E}} - J_{\mathcal{I}}(x)^T \lambda_{\mathcal{I}} - \begin{bmatrix} 0 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = 0, \quad (3.5a)$$

$$X_1 z_1 = 0, \quad (3.5b)$$

$$X_2 z_2 = 0, \quad (3.5c)$$

$$C_{\mathcal{I}}(x) \lambda_{\mathcal{I}} = 0, \quad (3.5d)$$

$$X_1 x_2 = 0, \quad (3.5e)$$

$$z_{1i} z_{2i} \geq 0, \quad i \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2, \quad (3.5f)$$

$$c_{\mathcal{E}}(x) = 0, \quad (3.5g)$$

$$(x_1, x_2) \geq 0, \quad (3.5h)$$

$$(\alpha, c_{\mathcal{I}}(x), \lambda_{\mathcal{I}}) \geq 0. \quad (3.5i)$$

Dans le lemme 3.1.1, on reconnaît le gradient par rapport à x du lagrangien (3.3) dans le membre de gauche de (3.5a). Les équations (3.5b)–(3.5d) sont les conditions de complémentarité tandis que (3.5e) avec (3.5h) sont les contraintes de complémentarité du (MPCC). Les conditions (3.5g) et (3.5i) sont les conditions d’admissibilité et de positivité des multiplicateurs correspondants à la fonction objectif et aux contraintes d’inégalité. La seule condition inhabituelle ici est (3.5f) qui impose aux multiplicateurs associés aux variables bi-actives d’avoir le même signe.

On déduit du lemme 3.1.1 plusieurs notions d’optimalité pour $\alpha > 0$. Pour de plus amples informations, nous référons aux articles (Scheel et Scholtes, 2000; Ralph et Wright, 2004). Nous nous intéresserons en particulier aux notions de *C-stationnarité* et de *stationnarité forte*. La C-stationnarité exige que $\alpha \neq 0$ dans le lemme 3.1.1, tandis que la stationnarité forte exige en plus que la condition (3.5f) soit remplacée par

$$(z_{1i}, z_{2i}) \geq 0 \quad \text{pour tout } i \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2. \quad (3.6)$$

Sans perte de généralité, on supposera que $\alpha = 1$ pour ces deux notions de stationnarité. Les points C-stationnaires ne sont pas généralement le type de points stationnaires désirés, car si les deux multiplicateurs z_{1i} et z_{2i} sont négatifs, il pourrait exister des directions de descente réalisables en ces points. Cependant il est possible que les méthodes de pénalité soient attirées

et coïncées par ce type de points. On en verra une illustration dans la section 3.5.

Pour les points fortement stationnaires, les multiplicateurs correspondant aux variables de coin sont non négatifs. Les multiplicateurs associés aux variables de branche sont donc libres, et pratiquement tout se passe comme si on avait des contraintes d'égalité.

Nous définissons la contrainte de qualification *de base* suivante, que nous utilisons à la section 3.2 pour établir la convergence de l'algorithme vers des points réalisables qui violent la MPCC-MFCQ.

Définition 3.1.2 (MPCC-BCQ) *Soit x un point réalisable pour le problème (MPCC). La contrainte de qualification de base pour le (MPCC) est satisfaite par x si et seulement si $(\lambda_{\mathcal{E}}, \lambda_{\mathcal{I}}, z) = (0, 0, 0)$ est le seul vecteur $(\lambda_{\mathcal{E}}, \lambda_{\mathcal{I}}, z_1, z_2) \in \mathbb{R}^{n_{\mathcal{E}}+n_{\mathcal{I}}+2p}$ qui vérifie $\lambda_i \geq 0$ pour $i \in \mathcal{A}$ et*

$$J_{\mathcal{E}}(x)^T \lambda_{\mathcal{E}} + \sum_{i \in \mathcal{A}(x)} \lambda_i \nabla c_i(x) + \begin{bmatrix} 0 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (3.7)$$

Observons que les conditions (3.5a) avec $\alpha = 0$, (3.5d) et (3.5i) donnent (3.7). Le lemme suivant de Motzkin sera utile pour établir le certificat de dégénérescence. Voir à ce propos, par exemple, le livre de Mangasarian (1994) pour ce lemme et d'autres théorèmes de l'alternative.

Lemme 3.1.3 (théorème de l'alternative de Motzkin) *Soient A et C deux matrices, avec A non vide. Alors, soit*

i. $Ad > 0$, $Cd = 0$ admet une solution d , soit

ii. $A^T \lambda_A + C^T \lambda_C = 0$ a une solution (λ_A, λ_C) telle que $\lambda_A \geq 0$ avec $\lambda_A \neq 0$,

mais jamais les deux en même temps.

Le résultat suivant, conséquence du lemme 3.1.3, établit une équivalence entre la MPCC-BCQ et la MPCC-MFCQ.

Lemme 3.1.4 *La MPCC-BCQ est satisfaite au point x , réalisable pour le problème (MPCC) si et seulement si la MPCC-MFCQ est satisfaite en x .*

Preuve. Définissons $J_{\mathcal{A}}(x)$ comme la matrice $|\mathcal{A}(x)| \times n$ dont les lignes sont celles de $J_{\mathcal{I}}(x)$ indexées par \mathcal{A} c'est-à-dire les vecteurs $\nabla c_i(x)$ pour $i \in \mathcal{A}$. Soit de même le vecteur $\lambda_{\mathcal{A}}$, un sous vecteur de $\lambda_{\mathcal{I}}$, indexé par \mathcal{A} . Soient

$$E \equiv \begin{bmatrix} 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix}, \quad A \equiv \begin{bmatrix} J_{\mathcal{A}}(x) \\ E \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad C \equiv J_{\mathcal{E}}(x).$$

Dans le lemme 3.1.3, posons $\lambda_A \equiv (\lambda_A, z_1, z_2)$ et $\lambda_C \equiv \lambda_C$. La relation (3.7) peut alors s'écrire $A^T \lambda_A + C^T \lambda_C = 0$, tandis que la MPCC-MFCQ s'énonce comme $Ad > 0$ et $Cd = 0$, où C est de rang maximal. On en déduit le résultat par application directe du lemme 3.1.3. \square

3.2 L'approche élastique S- ℓ_1 -QP

Nous procédons comme Gould *et al.* (2010) en appliquant une méthode de pénalité ℓ_1 à toute reformulation différentiable de (MPCC). Le problème de pénalité résultant étant non différentiable pour les points sur la frontière de l'ensemble réalisable, il est reformulé en un problème plus lisse par l'introduction de *variables élastiques*. Pour illustrer la démarche, nous nous concentrerons sur la formulation (3.1) dans le reste du chapitre 3. Évidemment tous les résultats que nous verrons pour cette formulation sont valables, moyennant quelques modifications adéquates, pour toute autre reformulation régularisante des contraintes de complémentarité.

Le problème de pénalité ℓ_1 associé à

$$\begin{aligned} & \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimiser}} && f(x) \\ & \text{sujet à} && c_{\mathcal{E}}(x) = 0, \quad c_{\mathcal{I}}(x) \geq 0, \\ & && X_1 x_2 = 0, \quad (x_1, x_2) \geq 0, \end{aligned} \tag{3.8}$$

s'écrit

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimiser}} \quad f(x) + \nu \|c_{\mathcal{E}}(x)\|_1 + \nu \|c_{\mathcal{I}}^-(x)\|_1 + \nu \|X_1 x_2\|_1 + \nu \|x_1^-\|_1 + \nu \|x_2^-\|_1, \tag{3.9}$$

où $\nu > 0$ est un paramètre de pénalité.

On peut transformer (3.9) en un *problème élastique* de plusieurs manières, comme on peut le voir dans (Gould *et al.*, 2010). Dans notre démarche, nous optons pour la formulation élastique

$$\begin{aligned} & \underset{x \in \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{R}^{n_C}}{\text{minimiser}} && \phi_{\nu}^P(x, s) \\ & \text{sujet à} && c_{\mathcal{E}}(x) + s_{\mathcal{E}} \geq 0, \quad s_{\mathcal{E}} \geq 0, \\ & && c_{\mathcal{I}}(x) + s_{\mathcal{I}} \geq 0, \quad s_{\mathcal{I}} \geq 0, \\ & && x_1 + s_1 \geq 0, \quad s_1 \geq 0, \\ & && x_2 + s_2 \geq 0, \quad s_2 \geq 0, \\ & && X_1 x_2 + s_3 \geq 0, \quad s_3 \geq 0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

avec

$$\phi_\nu^P(x, s) := f(x) + \nu \sum_{i \in \mathcal{E}} (c_i(x) + 2s_i) + \nu \sum_{i \in \mathcal{I}} s_i + \nu \sum_{i=1}^p (x_{1i}x_{2i} + 2s_{3i} + s_{1i} + s_{2i}), \quad (3.11)$$

et où $s = (s_{\mathcal{E}}, s_{\mathcal{I}}, s_1, s_2, s_3)$ est le vecteur des *variables élastiques*. Nous insistons encore ici sur le fait que, moyennant quelques ajustements adéquats, tous les résultats que nous verrons pour cette formulation élastique se transposent à toute autre formulation élastique comme le soulignent (Gould *et al.*, 2010).

Remarquons ici que dans le problème (3.10), les contraintes $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ sont traitées comme toute autre contrainte d'inégalité et les contraintes $X_1x_2 = 0$, sont considérées comme toute autre contrainte d'égalité. En d'autres termes, dans la formulation (3.10), les contraintes de complémentarité ne bénéficient d'aucun traitement spécial. Nous reviendrons sur ce point dans la section 3.6.

Une propriété intéressante de la formulation (3.10) est que la MFCQ est désormais satisfaite par chacun de ses points admissibles (x, s) , (Gould *et al.*, 2010, théorème 2.2). De plus, par simple observation, on peut voir que l'intérieur relatif de l'ensemble admissible est non vide. On peut donc envisager de les résoudre par un algorithme de points intérieurs primal-dual.

Pour éviter toute confusion les multiplicateurs pour le problème (3.10) seront notés y et u tandis que ceux pour le (MPCC) resteront λ et z . Les conditions d'optimalité du premier

ordre pour (3.10) s'écrivent

$$\nabla f(x) - J_{\mathcal{E}}(x)^T(y_{\mathcal{E}} - \nu e_{\mathcal{E}}) - J_{\mathcal{I}}(x)^T y_{\mathcal{I}} - \begin{bmatrix} 0 \\ X_2 y_3 - \nu x_2 + y_1 \\ X_1 y_3 - \nu x_1 + y_2 \end{bmatrix} = 0, \quad (3.12a)$$

$$\begin{bmatrix} \nu e_{\mathcal{E}} - (y_{\mathcal{E}} - \nu e_{\mathcal{E}}) - u_{\mathcal{E}} \\ \nu e_{\mathcal{I}} - y_{\mathcal{I}} - u_{\mathcal{I}} \end{bmatrix} = 0, \quad (3.12b)$$

$$\begin{bmatrix} \nu e - y_1 - u_1 \\ \nu e - y_2 - u_2 \\ \nu e - (y_3 - \nu e) - u_3 \end{bmatrix} = 0, \quad (3.12c)$$

$$(C_{\mathcal{E}}(x) + S_{\mathcal{E}})y_{\mathcal{E}} = 0, \quad (3.12d)$$

$$(C_{\mathcal{I}}(x) + S_{\mathcal{I}})y_{\mathcal{I}} = 0, \quad (3.12e)$$

$$(X_1 + S_1)y_1 = 0, \quad (3.12f)$$

$$(X_2 + S_2)y_2 = 0, \quad (3.12g)$$

$$(X_1 X_2 + S_3)y_3 = 0, \quad (3.12h)$$

$$Su = 0, \quad (3.12i)$$

$$(c_{\mathcal{E}}(x) + s_{\mathcal{E}}, c_{\mathcal{I}}(x) + s_{\mathcal{I}}, x_1 + s_1, x_2 + s_2, X_1 x_2 + s_3, s) \geq 0, \quad (3.12j)$$

$$(y, u) \geq 0, \quad (3.12k)$$

où $u = (u_{\mathcal{E}}, u_{\mathcal{I}}, u_1, u_2, u_3)$ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes de borne sur les variables élastiques et $y = (y_{\mathcal{E}}, y_{\mathcal{I}}, y_1, y_2, y_3)$ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange correspondant aux contraintes d'inégalité.

Les conditions (3.12a)–(3.12c) sont le gradient par rapport à x et s du lagrangien ci-dessous

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, s, y, u; \nu) = & \phi_{\nu}^p(x, s) - y_{\mathcal{E}}^T(c_{\mathcal{E}}(x) + s_{\mathcal{E}}) - y_{\mathcal{I}}^T(c_{\mathcal{I}}(x) + s_{\mathcal{I}}) \\ & - y_1^T(x_1 + s_1) - y_2^T(x_2 + s_2) - y_3^T(X_1 x_2 + s_3) - u^T s. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Les propriétés suivantes sont une adaptation de celles de (Gould *et al.*, 2010) au cas des contraintes de complémentarité.

Théorème 3.2.1 *Si (x, s, y, u) est un point de KKT pour (3.10) pour un certain $\nu > 0$ et si x est réalisable pour (MPCC) alors $s = 0$ et x est fortement stationnaire pour (MPCC) avec les multiplicateurs*

$$(\lambda_{\mathcal{E}}, \lambda_{\mathcal{I}}, z_1, z_2) = (y_{\mathcal{E}} - \nu e_{\mathcal{E}}, y_{\mathcal{I}}, X_2(y_3 - \nu e) + y_1, X_1(y_3 - \nu e) + y_2). \quad (3.14)$$

Preuve. La preuve pour $\lambda_{\mathcal{E}}$ et $\lambda_{\mathcal{I}}$ est donnée dans (Gould *et al.*, 2010, théorème 2.3). Nous nous limitons au cas de z_1 et z_2 . Pour montrer que $s = 0$, nous distinguons deux situations. Supposons dans un premier temps que $x_{ki} = 0$ pour un certain $k \in \{1, 2\}$. Si $s_{ki} > 0$ alors nous tirons de (3.12i) que $u_{ki} = 0$ et avec (3.12c) il s'en suit que $y_{ki} = \nu > 0$. Or (3.12f)–(3.12h) donnent $s_{ki} = 0$, contradictoire à $s_{ki} > 0$. Par conséquent $s_{ki} = 0$. Si en revanche, $x_{ki} > 0$ alors (3.12f)–(3.12h) impliquent que $y_{ki} = 0$. Ceci avec (3.12c) donnent $u_{ki} = \nu > 0$. Et de (3.12i) on tire $s_{ki} = 0$. En conséquence, $s_1 = s_2 = 0$. On montre de la même manière que $s_3 = 0$ en observant que le vecteur $X_1 x_2 = 0$. Avec ce résultat et (3.12h), on obtient que $s_{3i} y_{3i} = 0$ pour tout i . De la relation (3.12c) découle $s_{3i} y_{3i} = s_{3i} (2\nu - u_{3i})$. Mais en vertu de (3.12i) on a $s_{3i} u_{3i} = 0$. On tire de l'égalité précédente que $2\nu s_{3i} = 0$ et donc que $s_{3i} = 0$, étant donné que $\nu > 0$.

Puisque x est réalisable, on a $X_1 x_2 = X_2 x_1 = 0$ et le multiplicateur z défini par (3.14) donne la condition (3.5a). De $s = 0$, on déduit des conditions (3.12f)–(3.12h) que $X_1 y_1 = X_2 y_2 = X_1 X_2 y_3 = 0$. Donc $X_1 z_1 = X_1 y_1 - \nu X_1 x_2 + X_1 X_2 y_3 = 0$ et $X_2 z_2 = X_2 y_2 - \nu X_2 x_1 + X_1 X_2 y_3 = 0$ et les conditions (3.5b)–(3.5c) sont satisfaites. De (3.12j) on tire (3.5h). Enfin pour les indices correspondant aux variables bi-actives, $i \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$, la condition (3.14) donne $(z_{1i}, z_{2i}) = (y_{1i}, y_{2i})$ et de (3.12k) on déduit que $(z_{1i}, z_{2i}) \geq 0$ pour tout $i \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$. En conclusion x est fortement stationnaire pour (MPCC). \square

Il est instructif d'observer que les multiplicateurs fournis par le théorème 3.2.1 associés aux contraintes de non négativité de x_1 et x_2 dans (MPCC) proviennent du multiplicateur y_3 associé aux contraintes d'égalité $X_1 x_2 = 0$ et que ces dernières sont traitées identiquement à toute contrainte d'égalité générale $c_{\mathcal{E}}(x) = 0$. En effet ils sont multipliés par la matrice jacobienne correspondant à ces contraintes, ici la matrice $\begin{bmatrix} 0 & X_2 & X_1 \end{bmatrix}^T$, et décalés de νe . Vu sous cet angle la formulation (3.10) traite indistinctement les égalités usuelles $c_{\mathcal{E}}(x) = 0$ et celles provenant de la reformulation des contraintes de complémentarité.

Le résultat suivant établit l'implication inverse.

Théorème 3.2.2 *Soit x un point fortement stationnaire pour (MPCC) auquel sont associés les multiplicateurs finis (λ, z) tels que (3.5) est satisfaite avec $\alpha = 1$ et avec (3.5f) remplacée par (3.6). Posons*

$$\bar{\nu} = \max \left[\|\lambda\|_{\infty}, \max_{i \in \mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{A}_2} \left\{ -\frac{z_{1i}}{x_{2i}} \mid z_{1i} < 0 \right\}, \max_{i \in \mathcal{A}_2 \setminus \mathcal{A}_1} \left\{ -\frac{z_{2i}}{x_{1i}} \mid z_{2i} < 0 \right\} \right]. \quad (3.15)$$

Soient les multiplicateurs $y_{\mathcal{E}} = \lambda_{\mathcal{E}} + \nu e_{\mathcal{E}}$, $y_{\mathcal{I}} = \lambda_{\mathcal{I}}$,

$$y_1 \equiv z_1 + \nu x_2, \quad y_2 \equiv z_2 + \nu x_1, \quad y_{3i} \equiv \begin{cases} (z_{1i} + \nu x_{2i})/x_{2i}, & i \in \mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{A}_2, \\ (z_{2i} + \nu x_{1i})/x_{1i}, & i \in \mathcal{A}_2 \setminus \mathcal{A}_1, \\ 0, & i \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2, \end{cases} \quad (3.16)$$

et

$$u_1 \equiv \nu e - y_1, \quad u_2 \equiv \nu e - y_2, \quad u_3 \equiv 2\nu e - y_3. \quad (3.17)$$

Alors le point (x, s, y, u) avec $s = 0$ est un point de KKT pour le problème élastique (3.10), et ce pour tout $\nu \geq \bar{\nu}$.

Preuve. La preuve de ce théorème pour des contraintes générales se trouve dans (Gould et al., 2010, théorème 2.5) où il est établi que ν doit être plus grand que $\|\lambda\|_{\infty}$. En nous limitant au cas des contraintes de complémentarité, puisque x est fortement stationnaire on a $(z_{1i}, z_{2i}) \geq 0$ pour tout $i \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$. Les multiplicateurs donnés satisfont la condition $(y, u) \geq 0$ pour $\nu \geq \bar{\nu}$.

Montrons alors que $(x, 0, y, u)$ est un point de KKT pour tout paramètre de pénalité $\nu \geq \bar{\nu}$. On sait, par construction, que $X_2 y_3 - \nu x_2 + y_1 = z_1$ et que $X_1 y_3 - \nu x_1 + y_2 = z_2$, et donc que (3.12a) est vérifiée. De même (3.12c) est satisfaite. De $s = 0$ on tire de (3.12i), de l'admissibilité de x et de (3.16), les conditions (3.12f)–(3.12h). Les conditions (3.12k) sont immédiates en vertu des définitions (3.16) et (3.17). Enfin avec $s = 0$, (3.5h) implique (3.12j). D'où $(x, 0, y, u)$ est un point de KKT du (3.10) pour tout paramètre de pénalité $\nu \geq \bar{\nu}$. \square

Dans le théorème 3.2.2, une hypothèse parmi d'autres qui garantit que les multiplicateurs (y, z) sont finis est la MPCC-MFCQ. On pourrait toutefois obtenir un ensemble de multiplicateurs finis sous d'autres hypothèses.

3.3 L'algorithme de points intérieurs primal-dual

Le problème barrière logarithmique correspondant à (3.10) est

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{R}^{n_C}}{\text{minimiser}} \quad \phi_{\nu, \mu}^B(x, s), \quad (3.18)$$

avec

$$\begin{aligned}\phi_{\nu,\mu}^B(x,s) &= \phi_{\nu}^P(x,s) - \mu \sum_{i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}} \log(c_i(x) + s_i) - \mu \sum_{i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}} \log(s_i) \\ &\quad - \mu \sum_{i=1}^p \log(x_{1i} + s_{1i}) - \mu \sum_{i=1}^p \log(s_{1i}) - \mu \sum_{i=1}^p \log(x_{2i} + s_{2i}) - \mu \sum_{i=1}^p \log(s_{2i}) \\ &\quad - \mu \sum_{i=1}^p \log(x_{1i}x_{2i} + s_{3i}) - \mu \sum_{i=1}^p \log(s_{3i}),\end{aligned}$$

et où $\mu > 0$ désigne le paramètre barrière. Le système primal-dual est issu de l'écriture des conditions d'optimalité du premier ordre pour le problème (3.18). On peut voir ces conditions comme une perturbation des conditions (3.12) où les conditions de complémentarité (3.12d)–(3.12i) sont remplacées par

$$(C_{\mathcal{E}}(x) + S_{\mathcal{E}})y_{\mathcal{E}} = \mu e_{\mathcal{E}}, \quad (3.19a)$$

$$(C_{\mathcal{I}}(x) + S_{\mathcal{I}})y_{\mathcal{I}} = \mu e_{\mathcal{I}}, \quad (3.19b)$$

$$(X_1 + S_1)y_1 = \mu e_p, \quad (3.19c)$$

$$(X_2 + S_2)y_2 = \mu e_p, \quad (3.19d)$$

$$(X_1X_2 + S_3)y_3 = \mu e_p, \quad (3.19e)$$

$$Su = \mu e, \quad (3.19f)$$

avec les vecteurs unités e de taille appropriée.

Le prototype de l'algorithme élastique comprend une itération externe et une itération interne. Dans l'itération interne, on cherche une solution approchée du système primal-dual pour $\nu > 0$ fixé. Une fois une solution approchée obtenue, l'itération externe met à jour le paramètre de pénalité et le paramètre barrière.

Dans l'algorithme 3.3.1, les fonctions *d'arrêt* $\mu \mapsto \epsilon(\mu) \geq 0$ sont des fonctions définies pour tout $\mu \geq 0$ et telles que $\epsilon(\mu) = 0$ si et seulement si $\mu = 0$ et $\lim_{\mu \rightarrow 0} \epsilon(\mu) = 0$. La norme dans la condition 3.20a de l'algorithme 3.3.1 est donnée par $\|r\|_{[P]}^2 \equiv r^T d$ où le vecteur d est solution du système

$$K(w)d \equiv \begin{bmatrix} P + J^T(x)\Theta(w)J(x) & J(x)^T\Theta(w) \\ \Theta(w)J(x) & \Theta(w) + US^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_s \end{bmatrix} \equiv r, \quad (3.22)$$

et où J est la matrice Jacobienne par rapport à x des contraintes (3.10) et $\Theta(w)$ est la matrice

Algorithme 3.3.1 Prototype de l'algorithme—itération externe.

Étape 0. Soient les fonctions d'arrêt $\epsilon^D(\cdot)$, $\epsilon^C(\cdot)$ et $\epsilon^U(\cdot)$, et soit $\kappa_\nu > 0$.

Choisir $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $s^0 \in \mathbb{R}_+^{n_c}$ tels que $c(x^0) + s^0 > 0$, $x_1^0 + s_1^0 > 0$, $x_2^0 + s_2^0 > 0$ et $X_1^0 x_2^0 + s_3^0 > 0$.

Choisir des estimations des variables duales $y^0, u^0 \in \mathbb{R}_+^{n_c}$, et des paramètres de pénalité $\nu^0 > 0$ et barrière $\mu^0 > 0$. Poser $k = 0$.

Étape 1. Choisir une norme appropriée $\|\cdot\|_{[P^{k+1}]}$ et calculer un nouvel itéré primal-dual $w^{k+1} = (x^{k+1}, s^{k+1}, y^{k+1}, u^{k+1})$ satisfaisant à

$$\left\| \nabla_{(x,s)} \mathcal{L}(x^{k+1}, s^{k+1}, y^{k+1}, u^{k+1}; \nu^k) \right\|_{[P^{k+1}]} \leq \epsilon^D(\mu^k), \quad (3.20a)$$

$$\left\| \begin{bmatrix} (C_{\mathcal{E}}(x^{k+1}) + S_{\mathcal{E}}^{k+1})y_{\mathcal{E}}^{k+1} - \mu^k e_{\mathcal{E}} \\ (C_{\mathcal{I}}(x^{k+1}) + S_{\mathcal{I}}^{k+1})y_{\mathcal{I}}^{k+1} - \mu^k e_{\mathcal{I}} \\ (X_1^{k+1} + S_1^{k+1})y_1^{k+1} - \mu^k e_p \\ (X_2^{k+1} + S_2^{k+1})y_2^{k+1} - \mu^k e_p \\ (X_1^{k+1} X_2^{k+1} + S_3^{k+1})y_3^{k+1} - \mu^k e_p \end{bmatrix} \right\| \leq \epsilon^C(\mu^k), \quad (3.20b)$$

$$\left\| S^{k+1} u^{k+1} - \mu^k e \right\| \leq \epsilon^U(\mu^k), \quad (3.20c)$$

et

$$(x_1^{k+1} + s_1^{k+1}, x_2^{k+1} + s_2^{k+1}, s^{k+1}) > 0, \quad (3.21a)$$

$$(c(x^{k+1}) + s^{k+1}, X_1^{k+1} x_2^{k+1} + s_3^{k+1}) > 0, \quad (3.21b)$$

$$\text{et } (\nu^k [e + e_{\mathcal{E}}^0] + \kappa_\nu e, \nu^k [e + e_{\mathcal{E}}^0] + \kappa_\nu e) \geq (y^{k+1}, u^{k+1}) > 0 \quad (3.21c)$$

en résolvant, par exemple approximativement, (3.18).

Étape 2. Mettre à jour le paramètre barrière $\mu^{k+1} \in (0, \mu^k]$ de sorte que $\lim \mu^k = 0$. Si nécessaire ajuster le paramètre de pénalité ν^k . Faire $k = k + 1$ et retourner à l'Étape 1.

diagonale

$$\begin{bmatrix} Y_{\mathcal{E}}(C_{\mathcal{E}}(x) + S_{\mathcal{E}})^{-1} & & & & \\ & Y_{\mathcal{I}}(C_{\mathcal{I}}(x) + S_{\mathcal{I}})^{-1} & & & \\ & & Y_1(X_1 + S_1)^{-1} & & \\ & & & Y_2(X_2 + S_2)^{-1} & \\ & & & & Y_3(X_1 X_2 + S_3)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Ici, la matrice P est un préconditionneur qui approxime de manière appropriée la matrice hessienne du lagrangien de (3.10), $P \approx \nabla_{xx} \mathcal{L}$. Le préconditionneur P est choisi de sorte que la matrice $K(w)$ du système (3.22) soit définie positive, (Gould *et al.*, 2010, section 3.5). La norme $\|\cdot\|_{[P]}$ est la norme duale qui correspond à la norme $\|r\|_P = r^T K(w) r$ associée au préconditionneur. Cette norme adapte la géométrie de la région de confiance à celle de l'ensemble admissible afin de réduire le nombre de pas inadmissibles dans la résolution du problème (3.23).

La mise à jour du paramètre de pénalité est d'une grande importance pour établir les résultats de convergence de la section 3.4. Cette mise à jour se base sur les conditions 3.29 et 3.37 détaillées dans la section 3.4. Dans la condition 3.29, on oblige les violations des contraintes de (3.8) à tendre vers zéro à l'aide de deux suites positives η_1^k et η_2^k , toutes deux décroissantes vers zéro. Si à l'itération k , les diminutions observées pour ces violations sont plus fortes que les seuils imposées par η_1^k et η_2^k , alors on augmente ν^k en conséquence dans la condition 3.29. Quant à la condition 3.37, complémentaire à la condition 3.29, elle nous permet de délivrer le certificat de non satisfaction de la MFCQ en un point stationnaire de la suite d'itérés v^k . En effet elle impose d'augmenter la valeur de ν^k si la plus grande valeur des multiplicateurs de Lagrange associés à l'itéré courant est supérieure à $\gamma \nu^k$, $0 < \gamma < 1$. Ainsi, si l'ensemble de multiplicateurs de Lagrange concerné est non borné alors la valeur de ν^k sera augmentée un nombre infini de fois.

En principe tout algorithme globalement convergent qui vérifie les conditions (3.20a)–(3.21c) en un nombre fini d'itérations peut être utilisé dans l'itération interne. Dans notre implémentation décrite dans la section 3.5 nous avons opté pour une méthode de région de confiance du type Conn *et al.* (2000a). Gould *et al.* (2010) établissent la convergence de cet algorithme et le fait qu'il répond aux exigences de l'itération interne. Nous rappelons ici les propriétés de cet algorithme et procédons dans la section suivante à la description des propriétés des itérés externes.

Pour simplifier, on suppose que la matrice P^k est fixée pour toute la durée d'une itération interne. Nous faisons aussi les hypothèses suivantes :

Hypothèse 3.3.1 *Les fonctions f , $c_{\mathcal{E}}$ et $c_{\mathcal{I}}$ sont deux fois continûment différentiables sur*

un ouvert contenant tous les itérés générés. Sur cet ouvert, les dérivées $\nabla f(x)$, $\nabla_{xx}f(x)$, $\nabla c_i(x)$ et $\nabla_{xx}c_i(x)$ demeurent uniformément bornées pour tout $i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$.

Hypothèse 3.3.2 La norme de chaque préconditionneur P^k est bornée supérieurement et est telle que la plus petite valeur propre de la matrice K du système (3.22), λ_{\min}^k , est uniformément positive pour tout itéré k . Il existe donc une constante positive λ_{\min}^* telle que $\lambda_{\min}^k \geq \lambda_{\min}^* > 0$.

Hypothèse 3.3.3 La fonction barrière $\phi_{\nu,\mu}^B$ définie par (3.18) est bornée inférieurement pour tout $\mu > 0$ et tout point (x, s) satisfaisant à $c_i(x) + s_i > 0$ ($i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$), $x_1 + s_1 > 0$, $x_2 + s_2 > 0$, $X_1 x_2 + s_3 > 0$ et $s > 0$.

Nous avons opté de résoudre le sous-problème (3.18) par une méthode de région de confiance avec un préconditionneur. Partant d'un itéré initial strictement réalisable pour (3.10), comme par exemple l'itéré courant (x^k, s^k) , la méthode cherche à satisfaire les conditions (3.20a)–(3.21c) en résolvant une suite de sous-problèmes de région de confiance de la forme

$$\underset{d \in \mathbb{R}^{n+n_c}}{\text{minimiser}} \quad \nabla_{(x,s)} \phi_{\nu^k, \mu^k}^B(x, s)^T d + \frac{1}{2} d^T H^{\text{PD}}(x, s) d \quad \text{sujet à } \|d\|_{P^k} \leq \Delta, \quad (3.23)$$

où $\Delta > 0$ est le rayon de la région de confiance, $H^{\text{PD}}(x, s) \approx \nabla_{(x,s)}^2 \phi_{\nu^k, \mu^k}^B(x, s)$ est la matrice hessienne primal-duale définie par

$$H^{\text{PD}}(x, s) = \begin{bmatrix} \nabla_{xx} \mathcal{L}(x, s, y, u; \nu^k) + J^T(x) \Theta(w) J(x) & J^T(x) \Theta(w) \\ \Theta(w) J(x) & \Theta(w) + U S^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

pour des approximations strictement positives des multiplicateurs u et y et où $\mathcal{L}(x, s, y, u; \nu)$ est le lagrangien défini par (3.13). Dans (3.23), la norme qui définit la région de confiance est donnée par

$$\|d\|_{P^k}^2 = d^T K^d d,$$

où K est donnée par (3.22) et $P = P^k$. Sous les hypothèses standard sur ces estimations, l'écart entre les matrices hessiennes primale et primal-dual est insignifiant quand on a convergence (Conn *et al.*, 2000b, théorème 13.9.1). Les pas non admissibles sont automatiquement rejetés et le rayon de confiance réduit en conséquence. Pour plus d'informations sur les méthodes de région de confiance, voir l'article de (Conn *et al.*, 2000b).

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre approximativement (3.23). Nous avons choisi la méthode du gradient conjugué préconditionné de Steihaug (1983). Celle-ci exige la résolution

d'un système préconditionné de la forme (3.22), où comme mentionné ci-dessus $P = P^k$ est choisie de sorte que $K(w)$ soit une matrice définie positive.

Notons $w^{k,j} = (x^{k,j}, s^{k,j}, y^{k,j}, u^{k,j})$, $j = 1, 2, \dots$, les approximations successives générées durant les itérations internes correspondant à la $k^{\text{ème}}$ itération externe. À chaque pas accepté de la méthode de région de confiance, un nouvel itéré $(x^{k,j+1}, s^{k,j+1}) = (x^{k,j} + d_x, s^{k,j} + d_s)$ qui améliore $(x^{k,j}, s^{k,j})$ est obtenu. Pour tous k et j , notons les valeurs approchées des multiplicateurs primaux par

$$\begin{aligned}\bar{y}_{\mathcal{E}}^{k,j} &= \mu^k (C_{\mathcal{E}}(x^{k,j}) + S_{\mathcal{E}}^{k,j})^{-1} e, & \bar{y}_{\mathcal{I}}^{k,j} &= \mu^k (C_{\mathcal{I}}(x^{k,j}) + S_{\mathcal{I}}^{k,j})^{-1} e, \\ \bar{y}_1^{k,j} &= \mu^k (X_1^{k,j} + S_1^{k,j})^{-1} e, & \bar{y}_2^{k,j} &= \mu^k (X_2^{k,j} + S_2^{k,j})^{-1} e, \\ \bar{y}_3^{k,j} &= \mu^k (X_1^{k,j} X_2^{k,j} + S_3^{k,j})^{-1} e, & \bar{u}^{k,j} &= \mu^k (S^{k,j})^{-1} e.\end{aligned}$$

En vertu de nos hypothèses précédentes, il est aisé de voir que les hypothèses AS2–AS5, AS7 et AS8 de Conn *et al.* (2000a) sont satisfaites. Le résultat suivant établit un parallèle avec les théorèmes 2 et 4 de Conn *et al.* (2000a).

Théorème 3.3.1 *Supposons que les hypothèses 3.3.1–3.3.3 sont satisfaites, et que les relations asymptotiques suivantes*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|y_{\mathcal{E}}^{k,j} - \bar{y}_{\mathcal{E}}^{k,j}\| = 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \|y_{\mathcal{I}}^{k,j} - \bar{y}_{\mathcal{I}}^{k,j}\| = 0, \quad (3.25a)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|y_1^{k,j} - \bar{y}_1^{k,j}\| = 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \|y_2^{k,j} - \bar{y}_2^{k,j}\| = 0, \quad (3.25b)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|y_3^{k,j} - \bar{y}_3^{k,j}\| = 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \|u^{k,j} - \bar{u}^{k,j}\| = 0 \quad (3.25c)$$

sont vérifiées pour tout k . Alors pour toute itération externe k , on a

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\nabla_{(x,s)} \phi_{\nu^k, \mu^k}^B(x^{k,j}, s^{k,j})\|_{[P^k]} = 0.$$

Dans notre approche, les nouvelles valeurs approchées des variables duales $(y^{k,j+1}, u^{k,j+1})$ sont obtenues en projetant tout candidat (y, u) dans une boîte selon la règle

$$y^{k,j+1} = \min(y^U, \max(y^L, y)) \quad \text{et} \quad u^{k,j+1} = \min(u^U, \max(u^L, u)), \quad (3.26)$$

où min et max sont pris composante par composante et où à chaque itération interne, on

défini

$$\begin{aligned}
y_{\mathcal{E}}^L &= \kappa_l \min \left[e, y_{\mathcal{E}}^{k,j}, \bar{y}_{\mathcal{E}}^{k,j+1} \right], & y_{\mathcal{E}}^U &= \max \left[\kappa_u e, y_{\mathcal{E}}^{k,j}, \kappa_u (\mu^k)^{-1} e, \kappa_u \bar{y}_{\mathcal{E}}^{k,j+1} \right], \\
y_{\mathcal{I}}^L &= \kappa_l \min \left[e, y_{\mathcal{I}}^{k,j}, \bar{y}_{\mathcal{I}}^{k,j+1} \right], & y_{\mathcal{I}}^U &= \max \left[\kappa_u e, y_{\mathcal{I}}^{k,j}, \kappa_u (\mu^k)^{-1} e, \kappa_u \bar{y}_{\mathcal{I}}^{k,j+1} \right], \\
y_1^L &= \kappa_l \min \left[e, y_1^{k,j}, \bar{y}_1^{k,j+1} \right], & y_1^U &= \max \left[\kappa_u e, y_1^{k,j}, \kappa_u (\mu^k)^{-1} e, \kappa_u \bar{y}_1^{k,j+1} \right], \\
y_2^L &= \kappa_l \min \left[e, y_2^{k,j}, \bar{y}_2^{k,j+1} \right], & y_2^U &= \max \left[\kappa_u e, y_2^{k,j}, \kappa_u (\mu^k)^{-1} e, \kappa_u \bar{y}_2^{k,j+1} \right], \\
y_3^L &= \kappa_l \min \left[e, y_3^{k,j}, \bar{y}_3^{k,j+1} \right], & y_3^U &= \max \left[\kappa_u e, y_3^{k,j}, \kappa_u (\mu^k)^{-1} e, \kappa_u \bar{y}_3^{k,j+1} \right],
\end{aligned}$$

et

$$u^L = \kappa_l \min \left[e, u^{k,j}, \bar{u}^{k,j+1} \right], \quad u^U = \max \left[\kappa_u e, u, \kappa_u (\mu^k)^{-1} e, \kappa_u \bar{u}^{k,j+1} \right],$$

afin de garantir que les multiplicateurs demeurent suffisamment positifs et bornés. Ici, on doit avoir $0 < \kappa_l < 1 < \kappa_u$, et les valeurs de $\kappa_l = \frac{1}{2}$ et $\kappa_u = 10^{20}$ donnent suffisamment de flexibilité en pratique. Observons que les estimations primales sont situées dans la boîte. Nous prenons comme nouveau candidat $(y, u) = (y^{k,j} + d_y, u^{k,j} + d_u)$ où (d_y, d_u) est la correction duale tirée des équations de Newton pour le système perturbé (3.19) :

$$y_{\mathcal{E}}^{k,j} + d_{y_{\mathcal{E}}} = \bar{y}_{\mathcal{E}}^{k,j} - (C_{\mathcal{E}}(x^{k,j}) + S_{\mathcal{E}}^{k,j})^{-1} Y_{\mathcal{E}}^{k,j} (J_{\mathcal{E}}(x) d_x + d_{s_{\mathcal{E}}}), \quad (3.27a)$$

$$y_{\mathcal{I}}^{k,j} + d_{y_{\mathcal{I}}} = \bar{y}_{\mathcal{I}}^{k,j} - (C_{\mathcal{I}}(x^{k,j}) + S_{\mathcal{I}}^{k,j})^{-1} Y_{\mathcal{I}}^{k,j} (J_{\mathcal{I}}(x) d_x + d_{s_{\mathcal{I}}}), \quad (3.27b)$$

$$y_1^{k,j} + d_{y_1} = \bar{y}_1^{k,j} - (X_1^{k,j} + S_1^{k,j})^{-1} Y_1^{k,j} (d_{x_1} + d_{s_1}), \quad (3.27c)$$

$$y_2^{k,j} + d_{y_2} = \bar{y}_2^{k,j} - (X_2^{k,j} + S_2^{k,j})^{-1} Y_2^{k,j} (d_{x_2} + d_{s_2}), \quad (3.27d)$$

$$y_3^{k,j} + d_{y_3} = \bar{y}_3^{k,j} - (X_1^{k,j} X_2^{k,j} + S_3^{k,j})^{-1} Y_3^{k,j} (X_2 d_{x_1} + X_1 d_{x_2} + d_{s_3}), \quad (3.27e)$$

et où (d_x, d_s) est le pas de la méthode de la région de confiance évalué à l'aide de (3.23).

Le résultat suivant fait un parallèle avec (Conn *et al.*, 2000a, théorème 5) et resume les propriétés de nos choix des approximations des variables duales.

Théorème 3.3.2 *Supposons que les hypothèses 3.3.1–3.3.3 sont satisfaites. Supposons également que les multiplicateurs de Lagrange sont mis à jour par projection de toute estimation (3.27) telle que spécifiée par (3.26). Alors pour tout j , $(y^{k,j+1}, u^{k,j+1}) > 0$ et il existe une*

constante $\kappa(k)$, indépendante de j telle que

$$\begin{aligned} y_i^{k,j} &\leq \kappa(k) \max_j \left[\frac{1}{c_i(x^{k,j}) + s_i^{k,j}}, 1 \right], & u_i^{k,j} &\leq \kappa(k) \max_j \left[\frac{1}{s_i^{k,j}}, 1 \right], & i &\in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}, \\ y_{1i}^{k,j} &\leq \kappa(k) \max_j \left[\frac{1}{x_{1i}^{k,j} + s_{1i}^{k,j}}, 1 \right], & u_{1i}^{k,j} &\leq \kappa(k) \max_j \left[\frac{1}{s_{1i}^{k,j}}, 1 \right], & i &= 1, \dots, p, \\ y_{2i}^{k,j} &\leq \kappa(k) \max_j \left[\frac{1}{x_{2i}^{k,j} + s_{2i}^{k,j}}, 1 \right], & u_{2i}^{k,j} &\leq \kappa(k) \max_j \left[\frac{1}{s_{2i}^{k,j}}, 1 \right], & i &= 1, \dots, p, \\ y_{3i}^{k,j} &\leq \kappa(k) \max_j \left[\frac{1}{x_{1i}^{k,j} x_{2i}^{k,j} + s_{3i}^{k,j}}, 1 \right], & u_{3i}^{k,j} &\leq \kappa(k) \max_j \left[\frac{1}{s_{3i}^{k,j}}, 1 \right], & i &= 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Si de plus

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|d^{k,j}\|_{P^k} = 0 \quad \text{quand} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \|\nabla_{(x,s)} \phi_{\nu^k, \mu^k}^B(x^{k,j}, s^{k,j})\|_{[P^k]} = 0, \quad (3.28)$$

alors les relations (3.25) sont satisfaites pour tout k .

En d'autres termes, le théorème 3.3.2 stipule que les approximations des variables duales projetées dans la boîte (3.26) ne peuvent différer arbitrairement des valeurs approchées primales et qu'en cas de convergence toute estimation primale-duale qui se trouve dans la boîte (3.26) coïncide asymptotiquement avec la valeur approchée primale correspondante. Ce dernier point justifie la définition de (3.26); en effet, tel que le théorème 3.3.1 le montre, les relations asymptotiques (3.25) sont nécessaires pour obtenir la convergence.

Finalement, les deux résultats précédents combinés montrent que les critères d'arrêt (3.20a)–(3.21c) pour l'itération interne sont satisfaites en un nombre fini d'itérations. La preuve du théorème suivant est identique à celle de (Gould *et al.*, 2010, théorème 4.2).

Théorème 3.3.3 *Supposons que les hypothèses 3.3.1–3.3.3 sont satisfaites. Supposons de plus que les multiplicateurs de Lagrange sont mis à jour en projetant toute approximation, telle que (3.27), à l'intérieur de la boîte (3.26). Alors pour tout k , les conditions (3.20a)–(3.21c) sont satisfaites en un nombre fini d'itérations.*

3.4 Convergence globale

Dans cette section nous étendons les propriétés de convergence des itérés externes de Gould *et al.* (2010) au cas des contraintes de complémentarité et établissons les propriétés de convergence de la suite d'itérés générée par l'algorithme 3.3.1. On suppose que la mise à

jour du paramètre de pénalité est réalisée par

$$\nu^{k+1} = \begin{cases} \max\{\tau_1 \nu^k, \nu^k + \tau_2\} & \text{si } \max\{\|c_{\mathcal{I}}(x^k)^-\|, \|(x_1^k)^-\|, \|(x_2^k)^-\|\} > \eta_1^k \\ & \text{ou } \max\{\|c_{\mathcal{E}}(x^k)\|, \|X_1^k x_2^k\|\} > \eta_2^k, \\ \nu^k & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.29)$$

pour des suites $\{\eta_1^k\}$ et $\{\eta_2^k\}$ qui tendent vers zéro et des constantes $\tau_1 > 1$ et $\tau_2 > 0$. Une conséquence immédiate d'une mise à jour comme (3.29) est que le paramètre $\{\nu_k\}$ sera borné si et seulement si il est mis à jour un nombre fini de fois. Cette observation nous aidera à établir les implications réciproques des résultats de convergence de cette section.

Nous supposons ici que l'hypothèse suivante est satisfaite.

Hypothèse 3.4.1 *Les fonctions d'arrêt ϵ^C , ϵ^D et ϵ^U satisfont*

$$\epsilon^C(\mu) \leq \kappa_c \mu, \quad \epsilon^U(\mu) \leq \kappa_c \mu, \quad \text{et} \quad \epsilon^D(\mu) \leq \kappa_d \mu^{\gamma^k + \frac{1}{2}} \quad (3.30)$$

pour des constantes $\kappa_c \in (0, 1)$ et $\kappa_d > 0$ et une suite $\{\gamma^k\} > 0$.

Sous l'hypothèse 3.4.1, Conn *et al.* (2000a, lemme 4.3) montrent que l'algorithme 3.3.1 avec la mise à jour (3.29) vérifie

$$\|g\| \leq \kappa(\nu^k + \kappa_\nu)(\mu^k)^{\gamma^k} \quad (3.31)$$

pour tout vecteur g qui satisfait

$$\|g\|_{[P^{k+1}]} \leq \epsilon^D(\mu^k).$$

D'un autre côté, en utilisant la définition de la norme du préconditionneur $\|\cdot\|_{[P^k]}$ on obtient que

$$\|r\|_{[P^k]}^2 = r^T d^k \leq \|r\|_2 \|d^k\|_2 = \|(K^k)^{-1} r\|_2 \|r\|_2 \leq \frac{1}{\lambda_{\min}^k} \|r\|_2^2 \leq \frac{1}{\lambda_{\min}^*} \|r\|_2^2, \quad (3.32)$$

avec $\lambda_{\min}^* > 0$ défini dans l'hypothèse 3.3.2.

Le premier résultat de convergence concerne le cas où l'algorithme 3.3.1 produit une suite de paramètres de pénalité $\{\nu^k\}$ bornée. Nous distinguons ici le cas où $p = 0$ (pas de contraintes de complémentarité) et le cas $p > 0$ pour souligner dans le second cas que nous obtenons un point fortement stationnaire. Dans le premier cas, $p = 0$, les conditions de stationnarité forte (3.5) avec $\alpha = 1$ et avec (3.5f) remplacée par (3.6) coïncident avec les conditions de KKT usuelles.

Théorème 3.4.1 Soit $\{w^{k+1}\} = \{(x^{k+1}, s^{k+1}, y^{k+1}, u^{k+1})\}$ une suite d'itérés primale-duale produite par l'algorithme 3.3.1. Si le paramètre de pénalité $\{\nu^k\}$ atteint sa valeur finale en un nombre fini d'itérations alors

- i. la suite $\{s^{k+1}, y^{k+1}, u^{k+1}\}$ est bornée ;
- ii. si (x^*, s^*, y^*, u^*) est un point d'adhérence de $\{w^{k+1}\}$ alors $s^* = 0$ et x^* est
 - (a) fortement stationnaire pour (MPCC) si $p > 0$ ou
 - (b) un point de KKT de (MPCC) si $p = 0$.

Preuve. La preuve pour le cas $p = 0$ a été traitée dans (Gould *et al.*, 2010). On se concentre uniquement sur le cas $p > 0$, et comme dans les preuves précédentes, on s'intéresse seulement aux contraintes de complémentarité. Pour simplifier, posons $x_3 \equiv X_1 x_2$. Par hypothèse il existe un entier $N > 0$ tel que pour tout $k \geq N$ $\nu^k = \nu^*$. En conséquence, la stratégie de mise à jour (3.29) implique que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_1^{k+1} \geq 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_2^{k+1} \geq 0, \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} X_1^{k+1} x_2^{k+1} = 0. \quad (3.33)$$

Puisque de (3.21c), on sait que la suite $\{(y^{k+1}, u^{k+1})\}$ est bornée, il nous suffit alors de montrer que $\{s^{k+1}\}$ est bornée. Par contradiction, supposons que $s_{li}^{k+1} \rightarrow \infty$ pour un certain $(l, i) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, \dots, p\}$. On tire des propriétés des fonctions d'arrêt ϵ^C , ϵ^D et ϵ^U , du fait que $\mu^{k+1} \downarrow 0$ et des conditions (3.21a)–(3.21b) que $u_{li}^{k+1} \rightarrow 0$. Les conditions (3.20a) et (3.31) impliquent alors que $\{y_{li}^{k+1}\}$ est bornée et de (3.20b) on déduit que $x_{li}^{k+1} \rightarrow -\infty$, contredisant du même coup (3.33). Donc $\{s^{k+1}\}$ est bornée.

Soit la sous-suite $\{w^{k+1}\}_{\mathcal{K}} \subset \{w^{k+1}\}$ telle que $\lim_{k \in \mathcal{K}} w^{k+1} = w^* = (x^*, s^*, y^*, u^*)$. Montrons que w^* est un point de KKT du problème élastique et que x^* est réalisable pour (MPCC). Le résultat suivra alors du théorème 3.2.1.

De (3.31), du critère d'arrêt (3.20a) et de $\lim_{k \in \mathcal{K}} \mu^k = 0$ on tire

$$\begin{aligned} \|\nabla_{(x,s)} \mathcal{L}(x^*, s^*, y^*, u^*; \nu^*)\| &= \lim_{k \in \mathcal{K}} \left\| \nabla_{(x,s)} \mathcal{L}(x^{k+1}, s^{k+1}, y^{k+1}, u^{k+1}; \nu^k) \right\| \\ &\leq \lim_{k \in \mathcal{K}} \kappa(\nu^k + \kappa_\nu) (\mu^k)^{\gamma^k} = 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Donc w^* vérifie les conditions (3.12b)–(3.12c). De (3.20b) on obtient que $\lim_{k \in \mathcal{K}} (X_l^{k+1} + S_l^{k+1}) y_l^{k+1} = (X_l^* + S_l^*) y_l^* = 0$ pour $l = 1, 2, 3$ et (3.20c) implique que $S^* u^* = 0$, ce qui conduit à (3.12f)–(3.12i) pour w^* . Par les relations (3.21a)–(3.21b) on a $\lim_{k \in \mathcal{K}} (x_l^{k+1} + s_l^{k+1}, s_l^{k+1}) = (x_l^* + s_l^*, s_l^*) \geq 0$, $l = 1, 2, 3$. De (3.21c) on tire $\lim_{k \in \mathcal{K}} (y^{k+1}, u^{k+1}) = (y^*, u^*) \geq 0$. Finalement (3.33) montre que x^* est réalisable pour (MPCC). Ceci conclut la preuve. \square

Supposons maintenant que la suite de paramètres de pénalité produits par l'algorithme 3.3.1 diverge.

Théorème 3.4.2 *Sous les hypothèses 3.3.1–3.4.1, soient $w_p^{k+1} = (x^{k+1}, s^{k+1})$ et $w_D^{k+1} = (y^{k+1}, u^{k+1})$ des suites produites par l'algorithme 3.3.1. Si le paramètre de pénalité ν^k est mis à jour une infinité de fois aux itérations $k \in \mathcal{K} \subseteq \mathbb{N}$ alors*

- i. la sous-suite $\{w_D^{k+1}\}_{\mathcal{K}} = \{(y^{k+1}, u^{k+1})\}_{\mathcal{K}}$ est non bornée ;*
- ii. tout point d'adhérence w_p^* de $\{w_p^{k+1}\}$ est un point stationnaire pour la mesure de l'inadmissibilité ℓ_1 .*

Preuve. Dans l'ensemble \mathcal{K} la condition (3.29) implique que $\nu^{k+1} \geq \nu^k + \tau_2$, $\tau_2 > 0$ et donc que $\{\nu^k\}_{\mathcal{K}} \rightarrow \infty$. Puisque $\{\nu^k\}$ est croissante il s'en suit que $\{\nu^k\} \rightarrow \infty$. Supposons que $\{(y^{k+1}, u^{k+1})\}_{\mathcal{K}}$ est bornée et soit (y^*, u^*) une de ces valeurs d'adhérence. Quitte à considérer une sous-suite, si besoin en est, on suppose que $\{y^{k+1}\}_{\mathcal{K}} \rightarrow y^*$ et $\{u^{k+1}\}_{\mathcal{K}} \rightarrow u^*$ de telle sorte que pour $k \in \mathcal{K}$ suffisamment grand $\|y^{k+1}\| \leq 2\|y^*\|$ et $\|u^{k+1}\| \leq 2\|u^*\|$. En vertu de ces dernières bornes, de la partie des conditions (3.34) correspondant à (3.12c) et de la réciproque de l'inégalité triangulaire, on déduit que

$$\begin{aligned} (\sqrt{6p} - \kappa(\mu^{k-1})^{\gamma^{k-1}})\nu^{k-1} &\leq \|y^{k+1}\| + \|u^{k+1}\| + \kappa\kappa_\nu(\mu^{k-1})^{\gamma^{k-1}} \\ &\leq 2(\|y^*\| + \|u^*\|) + \kappa\kappa_\nu(\mu^{k-1})^{\gamma^{k-1}} \end{aligned}$$

pour tout $k \in \mathcal{K}$ suffisamment grand. Pour $k \rightarrow \infty$ la dernière condition implique que $\{\nu^{k-1}\}$ est bornée, contredisant la divergence de $\{\nu^{k-1}\}$. Par conséquent $\{w_D^{k+1}\}_{\mathcal{K}}$ est non bornée.

Supposons maintenant que $\{w_p^{k+1}\}_{\mathcal{K}} \rightarrow w_p^*$ et définissons

$$\bar{y}^{k+1} = \frac{y^{k+1}}{\nu^k}, \quad \bar{u}^{k+1} = \frac{u^{k+1}}{\nu^k} \quad \text{et} \quad \bar{\mu}^k = \frac{\mu^k}{\nu^k}. \quad (3.35)$$

En divisant par ν^k les conditions d'arrêt de l'algorithme 3.3.1 et avec la propriété (3.31) on

a

$$\left\| (\nu^k)^{-1} \nabla_{(x,s)} \mathcal{L}(x^{k+1}, s^{k+1}, y^{k+1}, u^{k+1}; \nu^k) \right\| \leq \kappa_p (\mu^k)^{\gamma^k}, \quad (3.36a)$$

$$\left\| \begin{bmatrix} (X_1^{k+1} + S_1^{k+1}) \bar{y}_1^{k+1} - \bar{\mu}^k e_p \\ (X_2^{k+1} + S_2^{k+1}) \bar{y}_2^{k+1} - \bar{\mu}^k e_p \\ (X_1^{k+1} X_2^{k+1} + S_3^{k+1}) \bar{y}_3^{k+1} - \bar{\mu}^k e_p \end{bmatrix} \right\| \leq (\nu^k)^{-1} \epsilon^c(\mu^k), \quad (3.36b)$$

$$\left\| S^{k+1} \bar{u}^{k+1} - \bar{\mu}^k e \right\| \leq (\nu^k)^{-1} \epsilon^u(\mu^k), \quad (3.36c)$$

$$(x_1^{k+1} + s_1^{k+1}, x_2^{k+1} + s_2^{k+1}, X_1^{k+1} x_2^{k+1} + s_3^{k+1}, s^{k+1}) > 0, \quad (3.36d)$$

$$([e + e_{\mathcal{E}}^0] + \kappa_\nu e, [e + e_{\mathcal{E}}^0] + \kappa_\nu e) \geq (\bar{y}^{k+1}, \bar{u}^{k+1}) > 0, \quad (3.36e)$$

où $\kappa_p \equiv (\nu^0)^{-1} \kappa(1 + \kappa_\nu)$. De (3.36e), on obtient que la suite $\{(\bar{y}^{k+1}, \bar{u}^{k+1})\}_{\mathcal{K}}$ est bornée. Sans perte de généralité, quitte à considérer une sous-suite si nécessaire, nous supposons que $\{(\bar{y}^{k+1}, \bar{u}^{k+1})\}_{\mathcal{K}} \rightarrow (y^*, u^*)$. Puisque $\mu^k \downarrow 0$, $\nu^k \rightarrow \infty$ et $(\nu^k)^{-1} \max\{\mu^k, \epsilon^c(\mu^k), \epsilon^u(\mu^k)\} \leq (\nu^0)^{-1} \max\{\epsilon^c(\mu^k), \epsilon^u(\mu^k)\} \rightarrow 0$, en faisant tendre k vers l'infini dans (3.36), on voit que la limite (x^*, s^*, y^*, u^*) satisfait la condition d'optimalité de KKT du premier ordre pour la mesure de l'inadmissibilité ℓ_1 pour (MPCC). \square

Afin de renforcer le résultat précédent, nous adjoignons à la mise à jour (3.29), la condition supplémentaire

$$\nu^{k+1} = \max\{\tau_1 \nu^k, \nu^k + \tau_2\} \quad \text{si} \quad \|y^{k+1} - \nu^k e_{\mathcal{E},3}^0\| > \gamma \nu^k, \quad (3.37)$$

dans laquelle $0 < \gamma < 1$ est une constante donnée. Cette nouvelle condition est utilisée en plus de celles définies dans (3.29). Ici $y^k = (y_{\mathcal{E}}^k, y_{\mathcal{I}}^k, y_1^k, y_2^k, y_3^k)$ désigne les multiplicateurs associés à toutes les contraintes et $e_{\mathcal{E},3}^0$ est un vecteur de \mathbb{R}^{n_c} avec des uns pour les indices correspondant à $y_{\mathcal{E}}$ et y_3 et des zéros pour toutes les autres composantes. Le décalage de ν^k ne s'applique qu'aux composantes correspondant aux contraintes d'égalité générales et aux égalités issues de la reformulation des contraintes de complémentarité. Ici encore on voit bien que les égalités issues de la reformulation des contraintes de complémentarité $X_1 x_2 = 0$ sont traitées comme toute autre égalité générale.

Supposons maintenant que le paramètre de pénalité ν^k est non borné mais à cause cette fois-ci de la condition (3.37). Le prochain résultat stipule que si l'algorithme converge vers un point réalisable du (MPCC) alors la MPCC-MFCQ n'est pas satisfaite en ce point. Rappelons encore ici que si $p = 0$, c'est-à-dire si on n'a aucune contrainte de complémentarité, la MPCC-MFCQ est identique à la MFCQ classique et le résultat ci-dessous coïncide avec (Gould *et al.*, 2010, lemme 4.4).

Théorème 3.4.3 *Supposons que les hypothèses 3.3.1–3.4.1 sont satisfaites et soient $\{(x^{k+1}, s^{k+1})\}$ et $\{(y^{k+1}, u^{k+1})\}$ des suites d'itérés produits par l'algorithme 3.3.1. Si le paramètre de pénalité ν^k est mis à jour un nombre infini de fois aux itérations $k \in \mathcal{K} \subseteq \mathbb{N}$ par la règle (3.37) mais un nombre fini de fois par la stratégie (3.29) alors*

- i. la sous-suite $\{(y^{k+1}, u^{k+1})\}_{\mathcal{K}}$ est non bornée ;*
- ii. Si (x^*, s^*) est un point d'adhérence de $\{(x^{k+1}, s^{k+1})\}$ alors x^* est un point réalisable du (MPCC) où*
 - (a) la MPCC-MFCQ n'est pas satisfaite si $p > 0$ ou*
 - (b) la MFCQ classique n'est pas satisfaite si $p = 0$.*

Preuve. Du théorème 3.4.2, on sait que $\{(y^{k+1}, u^{k+1})\}$ est non bornée. De (3.37), puisque $\{\nu^k\}$ est non bornée, on a pour tout $k \in \mathcal{K}$

$$\|y^{k+1} - \nu^k e_{\mathcal{E},3}^0\| > \gamma \nu^k \rightarrow +\infty.$$

Puisque ν^k diverge mais pas à cause de la condition (3.29), alors x^* est admissible pour (MPCC).

Définissons alors $\alpha^k = \|y^{k+1} - \nu^k e_{\mathcal{E},3}^0\|_\infty$ et les suites suivantes

$$\bar{y}_{\mathcal{E}}^{k+1} = \frac{y_{\mathcal{E}}^{k+1} - \nu^k e_{\mathcal{E}}}{\alpha^k}, \quad \bar{y}_{\mathcal{I}}^{k+1} = \frac{y_{\mathcal{I}}^{k+1}}{\alpha^k}, \quad \bar{u}^{k+1} = \frac{u^{k+1}}{\alpha^k} \quad \text{et} \quad \bar{\nu}^{k+1} = \frac{\nu^k}{\alpha^k}.$$

Posons de même $\bar{y}_i^{k+1} = y_i^{k+1}/\alpha^k$ ($i = 1, 2$) et

$$\bar{y}_3^{k+1} = \frac{y_3^{k+1} - \nu^k e}{\alpha^k}, \quad \bar{z}_1^{k+1} = X_2^{k+1} \bar{y}_3^{k+1} + \bar{y}_1^{k+1} \quad \text{et} \quad \bar{z}_2^{k+1} = X_1^{k+1} \bar{y}_3^{k+1} + \bar{y}_2^{k+1}.$$

On voit aisément que ces suites demeurent bornées et sans perte de généralité on peut supposer que $\{(\bar{y}^{k+1}, \bar{u}^{k+1}, \bar{z}^{k+1}, \bar{\nu}^{k+1})\}_{\mathcal{K}} \rightarrow (\bar{y}, \bar{u}, \bar{z}, \bar{\nu})$. De plus par construction $\|\bar{y}^{k+1}\|_\infty = 1$ pour tout k . Le critère d'arrêt (3.20a) mis à l'échelle par α^k devient

$$\left\| \frac{1}{\alpha^k} \nabla f(x^{k+1}) - J_{\mathcal{E}}(x^{k+1})^T \bar{y}_{\mathcal{E}}^{k+1} - J_{\mathcal{I}}(x^{k+1})^T \bar{y}_{\mathcal{I}}^{k+1} - \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{z}_1^{k+1} \\ \bar{z}_2^{k+1} \end{bmatrix} \right\| \leq \frac{\kappa(\nu^k + \kappa_\nu)}{\alpha^k} (\mu^k)^{\gamma^k}.$$

En passant à la limite et avec la relation (3.20b) il s'en suit que

$$J_{\mathcal{E}}(x^*)\bar{y}_{\mathcal{E}} + J_{\mathcal{A}}(x^*)\bar{y}_{\mathcal{A}} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Nous avons ainsi montré que la relation (3.7) est vérifiée pour des multiplicateurs non nuls. Et donc d'après le lemme 3.1.4, x^* ne peut satisfaire à la MPCC-MFCQ. \square

Nous reportons l'analyse de la convergence locale de l'algorithme 3.3.1 pour (MPCC) à des recherches futures. En effet, la LICQ n'est pas satisfaite pour le problème élastique (3.10) même si le (MPCC) correspondant vérifie la MPCC-LICQ. Considérons pour étayer cette observation le problème

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad x_1 + x_2 \quad \text{sujet à} \quad \min\{x_1, x_2\} = 0, \quad (3.38)$$

qui admet la solution $x^* = (0, 0)$. La MPCC-LICQ est clairement satisfaite en x^* mais le problème élastique correspondant est

$$\begin{aligned} \underset{x_1, x_2, s}{\text{minimiser}} \quad & x_1 + x_2 + \nu(s_1 + s_2 + x_1x_2 + 2s_3) \\ \text{sujet à} \quad & x_1 + s_1 \geq 0, \quad s_1 \geq 0, \\ & x_2 + s_2 \geq 0, \quad s_2 \geq 0, \\ & x_1x_2 + s_3 \geq 0, \quad s_3 \geq 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Toutes les contraintes de (3.39) sont actives au point $(x^*, s^*) = (0, 0, 0, 0, 0)$, mais on voit aisément que la matrice jacobienne des contraintes au point (x^*, s^*) ne peut être de rang maximal.

On peut prouver que si la MPCC-LICQ est satisfaite en x^* pour (MPCC) et si $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2(x^*) = \emptyset$ alors la LICQ est satisfaite par $(x^*, s^*) = (0, 0)$ pour (3.10). Cette hypothèse est clairement déraisonnable. Cependant la MFCQ est satisfaite par tout point réalisable de (3.39). Nous émettons la conjecture que la convergence locale rapide peut être prouvée comme suit. En supposant que le paramètre de pénalité reste borné, le théorème 3.4.1 s'applique. Si nous notons ν^* la valeur finale du paramètre de pénalité et par x^* un point d'adhérence de $\{x^k\}$, l'algorithme 3.3.1 identifie x^* en résolvant (3.10) pour $\nu = \nu^*$. la MFCQ est alors satisfaite pour ce dernier problème sans aucune hypothèse sur (MPCC). Il n'est pas très difficile de montrer que si (MPCC) satisfait la condition de complémentarité stricte usuelle

$$\lambda_i^* \neq 0 \text{ pour tout } i \in \mathcal{A}(x^*), \text{ et } (z_{1i}^*, z_{2i}^*) > 0 \text{ pour tout } i \in \mathcal{A}_1(x^*) \cap \mathcal{A}_2(x^*),$$

alors la condition de complémentarité stricte classique est aussi satisfaite pour (3.10) au point $(x^*, 0)$. De la même manière une condition suffisante standard du second ordre sur (MPCC) se traduit en une condition suffisante du second ordre pour (3.10). Nous pensons qu'il est alors possible d'utiliser les résultats de Wright et Orban (2002) pour montrer que le taux de convergence de l'itéré primal-dual $\{w^k\}$ vers w^* est le même que celui du paramètre barrière $\{\mu^k\}$ vers zéro. Un avantage de cette approche d'analyse de la convergence locale sur d'autres analyses telles que celles de DeMiguel *et al.* (2005) et Leyffer *et al.* (2006) est qu'il nous dispense de l'exigence de la satisfaction de la MPCC-LICQ par x^* pour (MPCC). Cette analyse s'appliquant aussi bien au MPCCs qu'aux problèmes non linéaires généraux abordés par Gould *et al.* (2010) ou les problèmes mathématiques avec contraintes évanescentes de Curatolo et Orban (2012), nous la différons à une recherche ultérieure.

3.5 Implémentation et résultats numériques

L'algorithme élastique est écrit en langage Python. Il est incorporé dans l'environnement de programmation NLPy (Orban, 2012). Les modèles des problèmes (MPCC) sont écrits en langage AMPL (Fourer *et al.*, 2002). Une interface entre AMPL et Python par l'intermédiaire des librairies (Gay, 1997) permet aux usagers d'interagir avec les modèles AMPL depuis Python.

Les sous-problèmes de région de confiance sont résolus par notre implémentation en Python de la méthode du gradient conjugué préconditionné tronqué de Steihaug (1983).

Les systèmes préconditionnés (3.22) sont réécrits sous la forme équivalente mais potentiellement plus creuse

$$\begin{bmatrix} P & J(x)^T \\ J(x) & -\Theta^{-1} - U^{-1}S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x \\ -U^{-1}Sr_s \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

duquel d_s peut être récupéré via

$$d_s = -U^{-1}S\xi + U^{-1}Sr_s.$$

La matrice des coefficients de ce dernier système est toujours indéfinie et est factorisée à l'aide de la routine de MA57 de Harwell Subroutine Library (2007).

Le principal intérêt du système (3.40) est l'avantage que l'on peut tirer de la faible densité de la matrice utilisée. On peut se préoccuper légitimement du conditionnement de cette matrice. Nous donnons ici une justification, plutôt informelle, du fait que sous les hypothèses standard, ce système demeure assez bien conditionné.

Supposons, pour simplifier, que P est choisie définie positive. Si (3.22) est définie positive alors il est aisé de voir que (3.40) possède exactement n valeurs propres positives et $m \equiv n_{\mathcal{E}} + n_{\mathcal{I}} + 3p$ valeurs propres négatives que nous notons λ_i pour $i \in \{-m, -m+1, \dots, -1, 1, \dots, n-1, n\}$. Une application directe de (Silvester et Wathen, 1994, lemme 2.2) montre qu'on peut ordonner ces valeurs propres comme suit

$$\Lambda_- \leq \lambda_{-m} \leq \dots \leq \lambda_{-1} \leq \lambda_- < 0 < \lambda_+ \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \Lambda_+,$$

où les bornes inférieure et supérieure sont définies par

$$\begin{aligned} \lambda_+ &= \lambda_{\min}(P), \\ \Lambda_+ &= \frac{1}{2} \left(\lambda_{\max}(P) + \sqrt{\lambda_{\max}(P)^2 + 4\sigma_{\max}(J)^2} \right), \\ \lambda_- &= \frac{1}{2} \left(\lambda_{\max}(P) - \sqrt{\lambda_{\max}(P)^2 + 4\sigma_{\min}(J)^2} \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Lambda_- &= \frac{1}{2} \left(\lambda_{\min}(P) - \lambda_{\max}(D) \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{(\lambda_{\min}(P) - \lambda_{\max}(D))^2 + 4(\sigma_{\max}(J)^2 + \lambda_{\min}(P)\lambda_{\max}(D))} \right), \end{aligned}$$

et où $\lambda_{\min}(A)$ est la plus petite valeur propre de la matrice A , $\lambda_{\max}(A)$ sa plus grande valeur propre, $\sigma_{\min}(B)$ la plus petite valeur singulière de B , $\sigma_{\max}(B)$ sa plus grande valeur singulière et $D \equiv \Theta^{-1} + U^{-1}S$. Il est alors facile de voir que si J est de plein rang et si P est un préconditionneur adéquat alors λ_- et λ_+ n'approchent pas zéro. La plus grande valeur propre positive peut être choisie bornée de sorte que $\sigma_{\max}(J)$ soit bornée. La seule inquiétude demeure Λ_- qui pourrait diverger si par exemple $\lambda_{\max}(D)$ diverge. D étant une matrice diagonale, sa plus grande valeur propre est $\max_i (c_i(x) + s_i)/y_i + \max_j s_j/u_j$. Sous les hypothèses du théorème 3.4.1, nous nous attendons à ce que chaque s_j tende vers zéro. Par conséquent pour que $\lambda_{\max}(D)$ diverge il faut que $u_j = o(s_j)$ pour au moins un indice j , ce qui indique qu'au moins une des contraintes de borne sur les variables élastiques est faiblement active. Par (Wright et Orban, 2002, corollaire 19), nous anticipons le comportement asymptotique suivant pour les solutions exactes : $s_j(\mu) \sim \sqrt{\mu}$ et $u_j(\mu) \sim \sqrt{\mu}$, où « $a \sim b$ » signifie que a/b est borné et non nul. Ainsi par continuité, on ne peut avoir $u_j = o(s_j)$ dans un voisinage de la trajectoire centrale. Une seconde possibilité est $y_i = o(c_i(x) + s_i)$ pour au moins un indice i . Si $c_i(x) + s_i$ tend vers zéro alors on ne peut pas non plus avoir $y_i = o(c_i(x) + s_i)$ pour la même raison que précédemment. Tel est le cas pour toutes les contraintes actives c_j . En

revanche si c_i est inactive a la solution x^* , $(c_i(x) + s_i) \rightarrow c_i(x^*) > 0$ et $y_i \rightarrow 0$. Dans ce cas la plus grande valeur propre de D diverge et est de l'ordre de $1/\mu$. Cette observation standard est également vraie pour le système (3.22).

Bien que ce qui précède n'est qu'une simple ébauche de preuve, et en pratique et dans nos expériences numériques il n'est nul besoin de choisir P définie positive. Cette justification, même informelle, nous donne une certaine confiance dans l'idée que le système équivalent (3.40) ne peut pas être plus mal conditionné que le système (3.22). En complément de ces remarques, observons que dans un cas idéal où les contraintes actives sont connues, en pivotant sur les indices des contraintes inactives dans la matrice bloc (2, 2) de (3.40) dans l'esprit de Gould (1986), on peut récupérer un système bien posé. Cependant nous ne faisons aucunement usage d'une telle stratégie dans notre implémentation. Nous omettons les détails sur le préconditionneur car ce thème n'est pas le point central de notre sujet.

Dans l'implémentation préliminaire, P est la matrice hessienne pleine du lagrangien $\nabla_{xx}\mathcal{L}(w)$. On augmente de manière itérative les valeurs des éléments diagonaux de P jusqu'à ce que la matrice du système (3.22) devienne définie positive ou de manière équivalente jusqu'à ce que la matrice coefficient du système (3.40) ait exactement $n_{\mathcal{E}} + n_{\mathcal{I}} + 3p$ valeurs propres négatives.

Nous définissons également trois types de paramètres de pénalité : le premier, $\nu_{\mathcal{E}}$, pénalise les contraintes d'égalité générales du problème (3.11). Le deuxième, ν_s , pénalise les termes contenant les variables élastiques associées aux contraintes d'inégalité générales. Le troisième, ν_t , est affecté aux termes contenant des variables élastiques pour les contraintes de bornes. Ce choix s'avère judicieux dans la mesure où il permet de pénaliser séparément les divers types de contraintes et de tenir compte du dimensionnement des contraintes. À ce propos notons qu'il est possible de généraliser tous les résultats de convergence pour un paramètre de pénalité unique au cas de paramètres de pénalité multiples en adjoignant à l'algorithme un mécanisme pour se prémunir des situations où certains paramètres de pénalité sont bornés tandis que d'autres divergent. Nous initialisons ces paramètres de pénalité par l'une des trois stratégies suivantes :

STRATÉGIE 1. $\nu^0 = \max\{1, \|\nabla f(x^0)\|_{\infty}\}$.

STRATÉGIE 2. $\nu_{s,t}^0 = \|u^0 + y^0\|_{\infty}$ et $\nu_{\mathcal{E}}^0 = \frac{1}{2}\|u^0 + y^0\|_{\infty}$.

STRATÉGIE 3. $\nu_{s,t}^0 = \|u^0 + y^0\|_{\infty}$ et $\nu_{\mathcal{E}}^0 = \max\{\|\nabla c_i(x^0)\|_{\infty} \mid i \in \mathcal{E}\}$.

Dans ces formules, x^0 désigne l'itéré initial donné par le modèle initial ou bien $x^0 = 0$ si le modèle n'en propose pas un et u^0, y^0 sont les multiplicateurs de Lagrange associés à x^0 . On les initialise avec les valeurs exactes des estimations primales si le modèle ne propose aucun point de départ. La première stratégie s'inspire de l'initialisation du mode élastique de

SNOPT (Gill *et al.*, 2005). Les deux autres proviennent directement des conditions (3.12b)–(3.12c). Les variables élastiques initiales sont choisies telles que $c_i(x^0) + s_i^0 \geq \varepsilon$ et $s_i^0 \geq \varepsilon$ pour tout i avec $\varepsilon > 0$, un paramètre spécifié manuellement. Dans notre implémentation on utilise $\varepsilon = 0.1$.

Le paramètre barrière est initialisé et mis à jour de manière linéaire comme suit $\mu^0 = 5$ et $\mu^{k+1} = \frac{1}{5}\mu^k$. Le paramètre de pénalité est mis à jour par les stratégies (3.29) et (3.37) où on a défini $\tau_1 = 10$, $\tau_2 = 10$, $\eta_1^k = \eta_2^k = \min\{(\mu^k)^{1.1}, (\mu^k)/10\}$ et $\gamma = 0.9$.

Nous imposons un maximum de 1000 itérations internes par itération externe. Les fonctions d'arrêt sont choisies comme suit

$$\epsilon^D(\mu) = 10\mu^{1.05}, \quad \epsilon^C(\mu) = \epsilon^U(\mu) = 10\mu.$$

L'optimalité est déclarée atteinte dès que la norme ℓ_∞ des résidus relatifs de (3.5) avec $\alpha = 1$ et (3.5f) remplacée par (3.6) est plus petit que $\epsilon_*^D = \epsilon_*^C = \epsilon_*^U = 10^{-6}$. Nous utilisons une mise à l'échelle standard, la même que celle de (Waltz *et al.*, 2006).

Un échec survient si on atteint le nombre maximal d'itérations internes ou si le paramètre barrière μ atteint sa plus petite valeur permise $\min(\epsilon_*^D, \epsilon_*^C)/1000 = 10^{-9}$ sans que les conditions d'optimalité soient satisfaites.

Notre implémentation possède d'autres propriétés notamment au niveau de la région de confiance, si un pas est rejeté, une recherche linéaire par recoupements du pas telle que décrite dans (Conn *et al.*, 2000b, section 10.3.2) est effectuée. Si au bout de cinq recoupements on a une longueur de pas α_k réalisable alors le rayon de confiance est remis à $2\alpha_k\|d_k\|_2$ où d_k est la direction de recherche. Dans le cas contraire, le rayon de confiance est mis à jour selon les règles usuelles. À la fin de chaque itération un *pas magique* (Gould *et al.*, 2010, section 6.1) est calculé afin de réduire davantage la valeur de l'objectif de la barrière logarithmique en fonction des variables s tout en maintenant les variables x fixées.

Nous avons effectué des tests numériques avec l'algorithme 3.3.1 sur les problèmes de la collection MacMPEC de Leyffer (2004). Nous avons éliminé de nos tests les problèmes : `bem-milanc30-s`, `incid-set*-16`, `incid-set*-32`, `pack-comp*-16`, `pack-comp*-32`, `qpec-200-*` et `siouxfls*` car ils prenaient des temps de résolution déraisonnables. Les problèmes `tap-09` et `tap-15` ont aussi été extraits de la liste de tests car ils produisaient une erreur de mémoire au niveau du driver d'AMPL.

Dans la littérature, la formulation (3.2) est typiquement vue comme plus « robuste » que la formulation (3.1). Pour illustrer cela avec notre méthode, il est instructif de comparer le comportement de l'algorithme 3.3.1 pour ces deux formulations sur des problèmes connus comme n'ayant pas de points fortement stationnaires. Les tableaux 3.1 et 3.2 contiennent les

résultats de ces tests pour six de ces problèmes. L'entête de ces tables se lisent ainsi : *Nom* donne le nom du problème ; *It.* est le nombre total d'itérations ; *Obj.* est la valeur finale de l'objectif ; *D-feas.*, *P-feas.* et *Comp.* sont les valeurs finales des admissibilités duale et primale et de la complémentarité, respectivement, pour (MPCC) ; $\log(\nu)$ est le logarithme de la plus grande valeur des paramètres de pénalité ; et *Opt.* indique si on atteint l'optimalité ou non. Un nombre négatif d'itérations indique un échec de l'algorithme.

Le tableau 3.1 reflète le fait qu'on peut converger vers des points C-stationnaires plutôt que vers des points fortement stationnaires. En d'autres termes la condition (3.5f) est vérifiée mais pas la condition (3.6). Il est intéressant d'observer que la formulation avec des inégalités (3.2) est moins permissive à cet état de fait. Dans le tableau 3.2 les échecs sont causés par le fait que le paramètre barrière atteint sa valeur minimale permise, avant que les conditions d'optimalité ne soient satisfaites. Pour le problème **scale4** les itérés produits par la formulation avec des égalités (3.1) tendent vers (0,0) tandis que la formulation (3.2) génère une suite d'itérés qui tend vers le point fortement stationnaire (0,0.01). Ce problème possède deux minima (0,0.01) et (0.01,0). Pour le problème **scholtes4** les deux formulations conduisent à un point B-stationnaire (Scheel et Scholtes, 2000).

Les faux optima des tableaux 3.1 et 3.2 illustrent le fait que pour les problèmes avec contraintes de complémentarité dans le théorème 3.2.1, « près de l'admissibilité » ne sous-entend pas « proche d'un point fortement stationnaire ». Cette situation semble intrinsèque à la nature hyperbolique¹ des relaxations de l'ensemble réalisable. Bien que le comportement décrit dans le tableau 3.2 est souhaitable il serait intéressant d'améliorer la version courante de l'algorithme afin de détecter les échecs plus tôt dans le processus de résolution.

Nous utilisons les profils de performance de Dolan et Moré (2002) afin de comparer les performances de l'algorithme 3.3.1 sur les deux formulations (3.1) et (3.2). Dans la figure 3.1 on a les profils de performance pour le nombre d'évaluations de la fonction objectif. Les profils

1. Des portions de la frontière de l'ensemble admissible de (3.10) sont décrites par des hyperboles.

Tableau 3.1 Résultats sur des problèmes ayant des points faiblement stationnaires, avec la formulation avec desc égalités (3.1).

Nom	It.	Obj.	D-feas.	P-feas.	Comp.	$\log(\nu)$	Opt.
ex9.2.2	247	9.99992445e+01	8.1e−05	2.0e−08	6.4e−05	4.4	True
qpec2	37	4.49921372e+01	1.4e−06	3.9e−08	1.3e−05	5.0	True
ralph1	27	−6.62995427e−05	1.9e−07	6.2e−09	1.3e−05	4.0	True
scale4	13	1.96846743e+00	4.4e−04	6.3e−09	1.3e−05	7.4	True
scholtes3	47	5.00000000e−01	5.2e−09	2.6e−10	2.6e−06	3.0	True
scholtes4	52	−7.06572336e−05	6.3e−10	1.4e−09	2.6e−06	5.5	True

Tableau 3.2 Résultats sur des problèmes ayant des points faiblement stationnaires, avec la formulation n'ayant que des inégalités (3.2).

Nom	It.	Obj.	D-feas.	P-feas.	Comp.	$\log(\nu)$	Opt.
ex9.2.2	-503	9.99993735e+01	5.8e-08	1.2e-08	3.1e-04	5.4	False
qpec2	-214	4.49920077e+01	1.0e-07	4.0e-08	4.0e-04	5.0	False
ralph1	-335	-4.91204783e-05	4.4e-08	2.4e-09	2.5e-05	5.0	False
scale4	286	9.99911180e-01	4.5e-09	4.4e-09	1.0e-04	4.4	True
scholtes3	51	5.00000036e-01	3.5e-07	3.6e-08	2.6e-06	3.0	True
scholtes4	-521	-1.00048961e-04	8.8e-09	2.5e-09	5.0e-05	5.3	False

pour le temps de calcul et le nombre d'itérations sont semblables à celui-ci et ont donc été omis. Les problèmes des tableaux 3.1 et 3.2 ne sont pas pris en compte dans les profils.

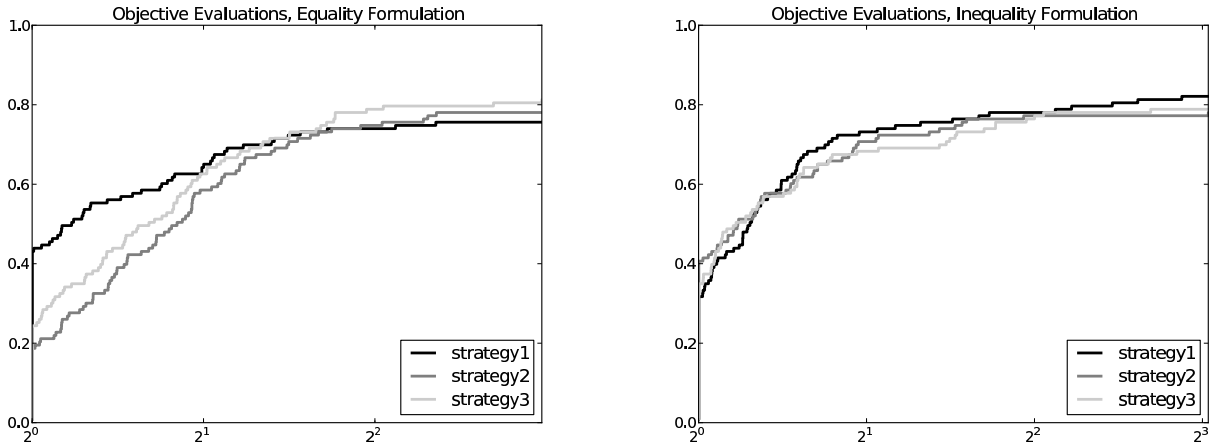


Figure 3.1 Profils de performance pour (3.1) (gauche) et (3.2) (droite) en terme du nombre d'évaluations de l'objectif.

La stratégie 1 obtient le meilleur pourcentage de succès des trois stratégies, de près de 45% pour la reformulation avec égalité, comme on le voit sur l'axe vertical gauche du graphique de droite de la figure 3.1. De plus pour la formulation avec inégalité, du graphique de droite de la figure 3.1, la stratégie 1 s'avère la plus performante comme l'atteste sa courbe au dessus de celle des autres pour un plus grand nombre de ratio, donné en abscisse sur ces graphiques. En concentrant notre analyse sur la stratégie 1 dans le graphique de droite de la figure 3.1 on peut catégoriser les échecs comme suit : les problèmes **gnash12**, **gnash12m**, **gnash15m** et **hakonsen** produisent des erreurs dans l'évaluation de l'objectif ou d'une contrainte en des points hors des domaines de ces dernières fonctions. Par exemple l'objectif des problèmes **gnash** contient une puissance fractionnaire des variables de la forme $(\sum_i x_i)^{-10/13}$ et les bornes $x_i \geq 0$. Dans les reformulations (3.1) et (3.2), ces bornes deviennent $x_i \geq -s_i$ avec $s_i \geq 0$ et il est possible qu'une partie ou tous les x_i deviennent négatifs, rendant ainsi l'évaluation de la puissance

fractionnaire impossible. Ce type d'échec n'est pas intrinsèque à la structure des MPCCs et est inhérent à toutes les méthodes inexactes. Les problèmes **bard2m** et **qpec2** terminent avec le paramètre barrière à sa valeur minimale permise tandis que le problème **qpec2** est proche de sa valeur optimale. Les autres échecs sont répertoriés dans le tableau 3.3.

Tous les échecs du tableau 3.3 sont dûs au fait qu'on atteint le nombre maximal d'itérations. Les problèmes **incid-set*** et **pack-comp*** sont des problèmes dégénérés au delà de leur nature complémentaire. Aucune de nos variantes ne résout un des problèmes restants. La cause de ces échecs ne semble pas être liée à l'initialisation du paramètre de pénalité ou à sa mise à jour. La résolution de chaque sous-problème barrière nécessite un grand nombre d'itérations et le résidu dual augmente de manière significative d'une itération à l'autre. Enfin le problème **ralphmod** est résolu par les stratégies 2 et 3 en initialisant le paramètre de pénalité à 10 mais pas par la stratégie 1 qui initialise la plus grande valeur de ses paramètres de pénalité à 10^5 .

Globalement, pour chacune des stratégies, le profil du graphique de gauche de la figure 3.1 est en dessous de celui du graphique de droite. Cela semble indiquer que toutes les stratégies se comportent mieux avec la formulation avec des inégalités (3.2) qu'avec la formulation avec des égalités (3.1).

La méthode la plus proche de la notre est sans doute celle de DeMiguel *et al.* (2005). Cette méthode transforme (MPCC) en le problème

$$\begin{aligned}
 & \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimiser}} && f(x) \\
 & \text{sujet à} && c_{\mathcal{E}}(x) = 0, \quad c_{\mathcal{I}}(x) \geq 0, \\
 & && x_1 + \delta_1 \geq 0, \quad x_2 + \delta_2 \geq 0, \quad -X_1 x_2 + \delta_c \geq 0,
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

où $\delta_1, \delta_2, \delta_c \in \mathbb{R}^n$ sont des vecteurs de perturbation non négatifs. Les auteurs montrent que si x^* est un point fortement stationnaire de (MPCC) qui satisfait la MPCC-LICQ, une condition de complémentarité stricte et une condition suffisante d'optimalité du second ordre, on peut choisir δ_1, δ_2 et δ_c de sorte que le même x^* soit un point de KKT pour (3.41) qui vérifie la LICQ, la complémentarité stricte et la condition suffisante du second ordre usuelles. Les règles de mise à jour des valeurs de δ_1, δ_2 et δ_c sont guidées par les valeurs approchées des multiplicateurs courants. Une recherche linéaire sur la fonction de mérite d'un lagrangien augmenté produit les itérés. Puisque certaines composantes de δ_1, δ_2 et δ_c peuvent s'annuler, des garde-fous sont nécessaires pour empêcher la convergence vers des solutions non réalisables pour (MPCC). Nous avons testé la méthode de DeMiguel *et al.* (2005) sur le même ensemble de problèmes à l'exception de ceux du tableau 3.1. Les profils obtenus apparaissent à la figure 3.2. Ces résultats sont très encourageants surtout à la lumière

Tableau 3.3 Échecs de la formulation avec des inégalités (3.2) et la stratégie 1.

Nom	Obj.	D-feas.	P-feas.	Comp.	$\log(\nu)$
dempe	2.83635128e+01	3.3e+02	7.0e−05	8.0e−03	3.0
design-cent-1	6.62286184e−05	1.3e+05	4.5e−05	4.0e−02	3.6
design-cent-2	−3.46047221e+00	2.5e+00	1.0e−05	8.0e−03	3.6
design-cent-21	−3.46032963e+00	1.0e+00	1.0e−05	8.0e−03	3.6
design-cent-3	−2.81886546e−03	3.5e+08	4.7e+00	1.0e+00	3.6
design-cent-31	−1.50163402e+01	1.6e+04	8.0e−05	4.0e−02	3.0
design-cent-4	−2.73998691e+00	6.1e+01	8.3e−04	6.3e−02	2.5
incid-set2-8	1.45014207e−02	2.3e+03	3.9e−06	3.2e−04	2.7
incid-set2c-8	8.79610464e−03	8.0e−05	1.8e−06	9.5e−05	3.7
monteiro	−2.62025990e+03	9.0e+04	2.8e+01	9.6e+04	5.3
monteiroB	−1.57301030e+03	5.1e+04	1.0e+01	8.1e−01	5.3
pack-comp1p-8	−9.37617590e+05	8.3e+04	4.4e+00	3.1e+03	5.7
pack-comp2p-8	−7.89886452e+05	2.4e+05	3.7e+00	3.6e+03	5.7
taxmcp	−8.04823191e−01	3.4e+02	2.1e+00	2.1e+03	4.0
water-FL	9.60649686e+02	2.0e+09	1.2e+01	1.1e+03	6.3
water-net	6.21019789e+02	7.3e+06	5.4e−01	4.9e+01	6.3

du fait que notre implémentation préliminaire est sous optimale et effectue des évaluations de fonctions redondantes.

3.6 Discussion

La méthode présentée ici est une méthode générale d’optimisation non linéaire ayant des propriétés intéressantes quand le problème est dégénéré. En particulier, les MPCCs et les problèmes non linéaires classiques sont résolus de la même manière, c’est-à-dire qu’il n’est pas nécessaire de savoir à l’avance si des contraintes sont de complémentarité dans le problème ou non. Nous n’avons donc aucun « mode MPCC » dans notre implémentation. Bien que la méthode ajoute deux fois autant de variables élastiques que de contraintes présentes, ces variables ne contribuent dans le système linéaire (3.40) qu’au niveau des blocs diagonaux et ont donc un apport marginal sur la densité de ces systèmes. Par ailleurs on peut implémenter la méthode en éliminant implicitement toutes les variables élastiques et en réduisant du même coup la taille du problème ; voir à ce propos la variante *variables élastiques implicites* de Gould *et al.* (2010).

D’un point de vue théorique, il est important de mentionner que nous n’avons aucunement besoin d’identifier des points satisfaisant à la condition d’optimalité du second ordre pour notre résultat de convergence globale vers des points fortement stationnaires. Le taux de succès de 80% sur la collection MacMPEC de Leyffer (2004) pour cette version préliminaire de l’algorithme élastique est très encourageant. Améliorer la robustesse de l’implémentation

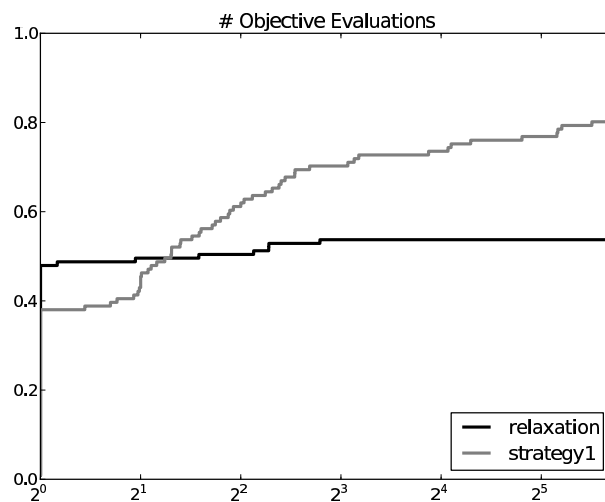


Figure 3.2 Profils de performances comparant l'algorithme 3.3.1 avec la formulation (3.1) et la Stratégie 1, et la relaxation de DeMiguel *et al.* (2005), en terme de nombre d'évaluations de l'objectif.

en adoptant des initialisations plus sophistiquées du paramètre barrière et des paramètres de pénalité sont des axes de recherche futurs. Une attention particulière sera accordée à la mise à jour dynamique des paramètres de pénalité car cela peut améliorer la robustesse de manière significative comme le rapportent Leyffer *et al.* (2006).

CHAPITRE 4

CONVERGENCE SUPERLINÉAIRE DES SUITES D'ITÉRÉS DES MÉTHODES DE POINTS INTÉRIEURS EN L'ABSENCE DE LA COMPLÉMENTARITÉ STRICTE

Dans ce chapitre, on traite d'une autre forme de dégénérescence qui est le manque de la complémentarité stricte. En effet, dans la théorie des problèmes non linéaires, il est courant de supposer l'existence d'une solution strictement complémentaire, c'est-à-dire que $c_i(x^*) + y_i^* > 0$ pour toute contrainte $c_i(x) \geq 0$ et tout multiplicateur qui lui est associé, afin d'établir les résultats de convergence. Cette hypothèse est numériquement cruciale car dans la matrice du système primal-dual, certaines lignes associées à ces contraintes actives tendent vers zéro rendant cette dernière matrice singulière à la solution. Ceci rend le système difficile à résoudre numériquement. En plus Wright et Orban (2002), entre autres, ont prouvé que la trajectoire centrale approche la solution du problème tangentiellement à certaines contraintes actives. Comme conséquence, les rayons des domaines des points satisfaisant au critère d'arrêt de l'algorithme primal-dual rétrécit. La distance de la solution locale du problème barrière à x^* est de l'ordre de $x(\mu) - x^* = O(\sqrt{\mu})$, selon Mifflin (1975) et Wright et Orban (2002). Donc la distance entre deux itérés consécutifs de la méthode de Newton varie en $O(\sqrt{\mu})$ tandis que le rayon de la région de convergence de cette méthode est de l'ordre de $O(\mu)$ dans le cas de la complémentarité stricte. Le rétrécissement des régions des solutions approchées du système de KKT perturbé à l'approche d'une solution faiblement active nécessite de faire plus d'un pas de Newton, donc plus d'une itération interne, pour passer à la nouvelle région définie par le paramètre barrière mis à jour. Cela amenuise tout espoir de convergence rapide, qui veut qu'on ait pour chaque valeur du paramètre barrière au plus une itération interne. Pour résoudre ce problème nous proposons dans ce chapitre une stratégie de mise à jour des variables duales correspondant aux contraintes faiblement actives. Par ce processus, on recherche un bon point de départ dans la région des solutions approchées du système de KKT de sorte qu'un seul pas de Newton nous amène dans la nouvelle région (voir la figure 4.1). En se basant sur une décomposition de la matrice du système de Newton selon les ensembles de contraintes strictement actives, faiblement actives et inactives, on montre théoriquement la bonne propriété de convergence et de régularisation de notre mise à jour.

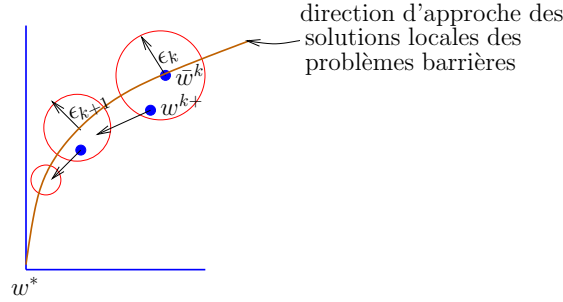


Figure 4.1 Schématisation de la mise à l'échelle duale

4.1 Introduction

Les méthodes de points intérieurs sont actuellement parmi les techniques d'optimisation non linéaires les plus puissantes pour la résolution de problèmes de grande taille. Ces méthodes sont connues pour avoir, au pire, une convergence polynômiale pour les problèmes convexes et peuvent se généraliser à des problèmes non convexes par des mécanismes de recherche linéaire, de région de confiance ou de filtre. De plus ces méthodes atteignent un taux de convergence Q-superlinéaire sous les hypothèses usuelles de non dégénérescence (Gould *et al.*, 2001). Ces hypothèses comprennent une condition de qualification appropriée et la complémentarité stricte.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'ordre de convergence asymptotique quand la complémentarité stricte n'est pas satisfaite. Soit le problème d'optimisation non linéaire,

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimiser}} \quad f(x) \quad \text{sujet à } c(x) \geq 0, \quad (4.1)$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont des fonctions continûment différentiables. Il est établi que toute solution locale x^* du problème (4.1) vérifie les conditions d'optimalité du premier ordre ou conditions de KKT suivantes

$$\nabla f(x^*) - J(x^*)^T y^* = 0, \quad (4.2a)$$

$$C(x^*) y^* = 0, \quad (4.2b)$$

$$(c(x^*), y^*) \geq 0, \quad (4.2c)$$

pour un certain vecteur de multiplicateurs y^* , pourvu qu'une condition de qualification soit vérifiée en cette solution. Dans l'équation (4.2b) nous notons $C(x)$, la matrice diagonale $\text{diag}(c(x))$ et $J(x)$ la matrice Jacobienne des contraintes c , évaluée au point x , c'est-à-dire la matrice dont la $i^{\text{ème}}$ ligne est $\nabla c_i(x)^T$.

Un certain nombre de conditions de qualification conduisent aux conditions (4.2). Parmi elles, les deux plus largement utilisées en optimisation non convexes sont la condition de qualification d'indépendance linéaire (LICQ) et la condition de qualification de Mangasarian et Fromovitz (MFCQ). Les méthodes primale-duales visent à satisfaire une version modifiée des conditions (4.2) dans lesquelles la condition de complémentarité (4.2b) est perturbée et suivent la solution du système non linéaire résultant quand le paramètre de perturbation tend vers zéro. Plus précisément les conditions (4.2) sont réécrites comme suit

$$\nabla f(x) - J(x)^T y = 0, \quad C(x)y = \mu e, \quad (c(x), y) > 0, \quad (4.3)$$

où e est le vecteur formé de un et $\mu > 0$ est le *paramètre barrière*. Nous notons $x(\mu)$ et $y(\mu)$ les solutions exactes du système (4.3) si elles existent. De manière concrète les conditions d'admissibilité primales-duales (4.2c) sont traitées implicitement et les deux premières équations de (4.3) forment un système d'équations non linéaires carré. L'*itération interne* désigne l'étape de la détermination d'une solution approchée du système (4.3) pour une valeur de μ donnée, la mise à jour de μ étant l'*itération externe*. Un critère d'arrêt typique pour l'itération externe vise à résoudre approximativement (4.3) à une certaine précision, généralement fonction de μ , avant de réduire ce dernier.

Il est alors raisonnable de tenter de résoudre (4.3) par une méthode de type Newton. Pour μ et une solution approchée du système primal-dual perturbé (x, y) , donnés, la méthode de Newton pour le système (4.3) calcule une correction $(\Delta x, \Delta y)$ solution de

$$\begin{bmatrix} H(x, y) & J(x)^T \\ J(x) & -C(x)Y^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ -\Delta y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f(x) - J(x)^T y \\ c(x) - \mu Y^{-1} e \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

où $H(x, y) := \nabla^2 f(x) - \sum_{j=1}^m y_j \nabla^2 c_j(x)$. Ce système peut s'écrire sous la forme normale équivalente, obtenue en éliminant Δy dans (4.4)

$$\left(H(x, y) + J(x)^T Y C(x)^{-1} J(x) \right) \Delta x = - \left(\nabla f(x) - J(x)^T y^P(x; \mu) \right) \quad (4.5)$$

impliquant l'*estimation primale* pour la variable duale $y^P(x; \mu) := \mu C(x)^{-1} e$.

Différents choix de y dans (4.4) ou de manière équivalente dans le membre de gauche de (4.5) mènent à différentes corrections Δx . La correction *primale* choisit $y = y^P(x; \mu)$ tout en garantissant localement la satisfaction de la condition de complémentarité perturbée alors que la correction *primal-duale* utilise la valeur de y produite par la correction de Newton précédente $y^- + \Delta y^-$ si cette dernière valeur est positive. Il apparaît aussi bien en théorie qu'en pratique que le choix primal-dual est supérieur au choix primal pour un certain nombre

de raisons, en particulier pour ce qui est de la convergence asymptotique rapide. Si x^* est une solution strictement complémentaire, la correction primale de Newton pourrait engendrer des itérés qui ne sont pas strictement réalisables suite à une réduction de μ (Wright, 1995). Gould *et al.* (2001) montrent que ceci ne se produit pas avec la correction primale-duale et qu'avec un critère d'arrêt conséquent pour les itérations internes, une seule résolution du système de Newton est suffisante et permet de faire tendre μ superlinéairement vers zéro.

Cependant les solutions de plusieurs problèmes de la vie réelle ne sont pas strictement complémentaires. Notre intention dans cette partie est de mener une investigation de la convergence asymptotique des méthodes de Newton primales-duales sur le système (4.4) pour divers choix de la variable duale y quand la complémentarité stricte n'est pas vérifiée. Mifflin (1975) montre que si la solution x^* est strictement complémentaire on a l'estimation $x(\mu) - x^* = \Theta(\mu)$ tandis que Mifflin (1975) et Wright et Orban (2002) prouvent qu'en l'absence de la complémentarité stricte, on a simplement $x(\mu) - x^* = \Theta(\sqrt{\mu})$.

Sur l'exemple canonique ci-dessous, nous illustrons les conséquences du manque de la complémentarité stricte ainsi que l'impact des différents choix de la variable duale y pour la solution du système (4.4).

Exemple 4.1.1 *Considérons le problème*

$$\underset{x \in \mathbb{R}}{\text{minimiser}} \quad \frac{1}{2}x^2 \quad \text{subject to} \quad x \geq 0. \quad (4.6)$$

La solution de (4.6) est clairement $x^* = 0$ et l'unique multiplicateur de Lagrange correspondant est $y^* = 0$. La contrainte est redondante et la solution n'est pas strictement complémentaire. Nous cherchons à résoudre (4.6) en minimisant itérativement la fonction barrière

$$\phi(x; \mu) := \frac{1}{2}x^2 - \mu \log(x),$$

dont les conditions de stationnarité du premier ordre sont équivalentes à (4.3). On vérifie aisément que pour tout $\mu > 0$, l'unique minimum de $\phi(x; \mu)$ est $x(\mu) = \sqrt{\mu}$ et l'estimation primale de y correspondante est $y(\mu) = y^P(x; \mu) = \mu/x(\mu) = \sqrt{\mu}$. Supposons que nous avons pu obtenir par un moyen quelconque la solution exacte $(x(\mu), y(\mu))$. Diminuons alors la valeur du paramètre barrière de μ à $\mu^+ \in (0, \mu)$ pour calculer les nouveaux itérés $x(\mu^+)$ et $y(\mu^+)$ à partir de $x(\mu)$ et d'un y initial. Le système (4.5) donne alors les corrections de Newton satisfaisant à

$$(\sqrt{\mu} + y)\Delta x = \mu^+ - \mu. \quad (4.7)$$

i. Avec le choix primal $y := y^P(x(\mu); \mu^+) = \mu^+/\sqrt{\mu}$ on obtient

$$\Delta x = -\sqrt{\mu} \left(\frac{\mu - \mu^+}{\mu + \mu^+} \right)$$

et

$$x + \Delta x = \sqrt{\mu} \left(1 - \frac{\mu - \mu^+}{\mu + \mu^+} \right)$$

d'où on conclut que $x + \Delta x$ sera dangereusement proche de zéro si μ^+ est proche de zéro. Cela constitue toutefois une amélioration par rapport au cas strictement complémentaire où on s'attend à avoir $x + \Delta x$ non réalisable (Wright, 1995).

ii. Avec le choix primal-dual $y := y(\mu) = \sqrt{\mu}$, on obtient $\Delta x = -(\mu - \mu^+)/(2\sqrt{\mu})$ et $x + \Delta x = (\mu + \mu^+)/(2\sqrt{\mu}) > 0$. L'erreur commise par rapport à la valeur cible $x(\mu^+) = \sqrt{\mu^+}$ baisse de $e_0 = \sqrt{\mu} - \sqrt{\mu^+}$ à $e_1 = x + \Delta x - \sqrt{\mu^+} = (\sqrt{\mu} - \sqrt{\mu^+})^2/(2\sqrt{\mu})$. Le ratio de ces erreurs

$$\frac{e_1}{e_0} = \frac{\sqrt{\mu} - \sqrt{\mu^+}}{2\sqrt{\mu}} = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\mu^+}{\mu}}$$

est à peine plus petite que $\frac{1}{2}$ si μ^+ est suffisamment petit par rapport à μ . Ainsi tout espoir de convergence superlinéaire disparaît.

Supposons que nous avons la chance de choisir notre y initial tel que $x + \Delta x = \sqrt{\mu^+}$, la solution exacte ! Cela doit vouloir dire que $\Delta x = \sqrt{\mu^+} - \sqrt{\mu}$. En substituant dans (4.7), il s'en suit que y doit être choisi égal à $\sqrt{\mu^+}$, c'est-à-dire que $y = \sqrt{\mu}\sqrt{\mu^+}/\mu$ —une mise à l'échelle de l'estimation primale-duale par un facteur de $\sqrt{\mu^+}/\mu$.

Nous conjecturons qu'il est insuffisant d'utiliser les estimations primales-duales pour les contraintes non strictement complémentaires. Nous pensons qu'une meilleure approximation est donnée par le vecteur y défini comme suit

$$y_i = \begin{cases} y_i(\mu)\sqrt{\mu^+/\mu} & \text{si la contrainte } i \text{ n'est pas strictement complémentaire,} \\ y_i(\mu) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.8)$$

Ce choix est justifié si nous présumons que $y_i(\mu) = \kappa\sqrt{\mu} + o(\sqrt{\mu})$ pour tout μ suffisamment petit et si la $i^{\text{ème}}$ contrainte n'est pas strictement complémentaire. En isolant κ dans l'expression précédente et en substituant à κ sa valeur obtenue dans le développement de μ^+ on obtient

$$y_i(\mu^+) = y_i(\mu)\sqrt{\frac{\mu^+}{\mu}} + o(1).$$

Il est bien-sûr très important de correctement identifier ces contraintes, ce qui peut se faire par l'intermédiaire d'indicateurs tels que ceux proposés par El-Bakry *et al.* (1994, 1996); Kanzow *et al.* (2000); Ji et Potra (1996).

Toutefois un indicateur plus simple est de marquer à l'itération k les contraintes pour lesquelles

$$c_i(x^k) \leq \mu_k^{\frac{1}{2}-\beta} \quad \text{et} \quad y_i^k \leq \mu_k^{\frac{1}{2}-\beta},$$

comme étant non strictement complémentaires où $(x^k, y^k) \approx (x(\mu_k), y(\mu_k))$ et $\beta \in (0, \frac{1}{2})$. En supposant que les gradients des contraintes demeurent uniformément bornés au voisinage de la solution x^* qui satisfait une condition de qualification appropriée nous anticipons, en vertu du théorème 18 de (Wright et Orban, 2002), qu'asymptotiquement

$$\begin{aligned} c_i(x(\mu)) &= c_i(x^*) + \nabla c_i(x^*)(x(\mu) - x^*) + O(\|x(\mu) - x^*\|^2) = \Theta(\sqrt{\mu}), \quad \text{et} \\ y_i(\mu) &= \Theta(\sqrt{\mu}), \end{aligned}$$

si et seulement si la $i^{\text{ème}}$ contrainte n'est pas strictement complémentaire.

Notre prédiction de la forme de $y_i(\mu)$ découle des travaux de Stoer et Wechs (1998) qui montrent que pour des problèmes de complémentarité linéaire $y_i(\mu)$ peut se développer en série de puissance de $\sqrt{\mu}$ autour de zéro. En fait l'existence d'une trajectoire centrale en l'absence de la complémentarité stricte demeure une question ouverte. Cependant nos résultats ne présupposent pas l'existence d'une telle trajectoire.

Le reste du chapitre 4 est organisé comme suit. La section 4.1.2 couvre d'importants résultats sur les minima locaux de la fonction barrière en l'absence de la complémentarité stricte, décrit nos ensembles indicateurs et établit qu'asymptotiquement, ils coïncident avec les ensembles actifs exacts. La section 4.2 définit les multiplicateurs mis à l'échelle utilisé dans le calcul du nouveau pas de Newton et établit d'importantes propriétés de ce nouvel itéré. La section 4.3 donne les propriétés du pas de Newton évalué à partir du nouvel itéré mis à l'échelle et établit que la convergence superlinéaire a lieu. La section 4.4 illustre numériquement nos résultats sur des exemples simples. Des commentaires et une discussion complètent ce chapitre dans la section §4.5.

4.1.1 Notation

Si $\{\alpha_k\}$ et $\{\beta_k\}$ sont deux suites de nombres positifs, nous dirons que $\alpha_k = O(\beta_k)$ si $\limsup \alpha_k/\beta_k < \infty$, $\alpha_k = \Omega(\beta_k)$ si $\beta_k = O(\alpha_k)$, $\alpha_k = \Theta(\beta_k)$ si $\alpha_k = O(\beta_k)$ et $\alpha_k = \Omega(\beta_k)$ et enfin $\alpha_k = o(\beta_k)$ si $\lim \alpha_k/\beta_k = 0$. Nous étendons les notations précédentes aux suites de vecteurs $\{a_k\}$ de \mathbb{R}^n comme suit : $a_k = O(\alpha_k)$ et $a_k = o(\alpha_k)$ signifient respectivement $\|a_k\| = O(\alpha_k)$ et $\|a_k\| = o(\alpha_k)$. Tout au long de ce chapitre e désigne le vecteur composé de

uns de la taille appropriée.

4.1.2 Résultats préliminaires

Soit l'ensemble

$$\mathcal{A}(x^*) := \{i = 1, \dots, m \mid c_i(x^*) = 0\} \quad (4.9)$$

des indices associés aux contraintes actives au point x^* , c'est-à-dire, les indices des seules contraintes prises en compte dans (4.2a) par l'intermédiaire de (4.2b). Notons \mathcal{F} l'ensemble réalisable du problème (4.1) et \mathcal{F}° son intérieur strict

$$\mathcal{F} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid c(x) \geq 0\}, \quad \mathcal{F}^\circ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid c(x) > 0\}.$$

Nous supposons que les données du problème (4.1) satisfont l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4.1.1 *Les fonctions f et c sont deux fois continûment différentiables sur un ensemble ouvert contenant l'ensemble réalisable de (4.1). De plus les gradients $\nabla f(x)$ et $\nabla c_i(x)$ et les matrices hessiennes $\nabla^2 f(x)$ et $\nabla^2 c_i(x)$ sont uniformément bornées sur l'ensemble réalisable de (4.1) et enfin $\mathcal{F}^\circ \neq \emptyset$.*

Pour une solution de (4.1), x^* , nous appelons \mathcal{Y}^* l'ensemble des multiplicateurs de Lagrange y^* tels que (x^*, y^*) vérifie (4.2). Il est aisé de voir que si la LICQ est vérifiée au point x^* alors $\mathcal{Y}^* = \{y^*\}$. Il est aussi bien connu (Gauvin, 1977) que x^* satisfait la MFCQ si et seulement si l'ensemble \mathcal{Y}^* est non vide et compact.

Définition 4.1.2 *La solution x^* de (4.1) qui vérifie la LICQ ou la MFCQ est strictement complémentaire s'il existe au moins un $y^* \in \mathcal{Y}^*$ tel que $c_i(x^*) + y_i^* > 0$.*

Une contrainte $i \in \mathcal{A}(x^*)$ est dite *faiblement active* si $y_i^* = 0$ pour tout multiplicateur $y^* \in \mathcal{Y}^*$ et *fortement active* s'il existe un vecteur $y^* \in \mathcal{Y}^*$ tel que $y_i^* > 0$. La solution x^* est strictement complémentaire si et seulement elle n'admet aucune contrainte faiblement active. Puisque sous la condition de la LICQ \mathcal{Y}^* est réduit à un singleton, nous définissons les ensembles faiblement actif \mathcal{A}_*^W , fortement actif \mathcal{A}_*^S et inactif \mathcal{I}_* à la solution x^* comme suit

$$\mathcal{A}_*^W := \{i = 1, \dots, m \mid y_i^* = c_i(x^*) = 0\} \quad (4.10a)$$

$$\mathcal{A}_*^S := \{i = 1, \dots, m \mid y_i^* > c_i(x^*) = 0\} \quad (4.10b)$$

$$\mathcal{A}_* := \mathcal{A}_*^S \cup \mathcal{A}_*^W, \quad \text{et} \quad (4.10c)$$

$$\mathcal{I}_* := \{1, \dots, m\} \setminus \mathcal{A}_*, \quad (4.10d)$$

où pour faire court nous avons noté $\mathcal{A}_* = \mathcal{A}(x^*)$.

Dans la suite du chapitre 4 nous définissons le lagrangien de (4.1) par

$$L(w) := f(x) - c(x)^T y, \quad w := (x, y), \quad (4.11)$$

et la fonction primale-duale

$$F(w; \mu) := \begin{bmatrix} \nabla_x L(w) \\ C(x)y - \mu e \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre peuvent alors s'écrire sous la forme plus compacte suivante : $F(w; 0) = 0$ et $(c(x), y) \geq 0$. Rappelons que les équations primales-duales (4.3) sont vérifiées par tous les minima locaux de la *fonction barrière logarithmique*

$$\phi(x; \mu) := f(x) - \mu \sum_{i=1}^m \log(c_i(x)). \quad (4.13)$$

Puisque nous l'utilisons dans la suite du chapitre 4, définissons la matrice jacobienne de F évaluée au point $(w; \mu)$

$$\nabla F(w; \mu) = \begin{bmatrix} \nabla_{xx} L(w) & -J(x)^T \\ YJ(x) & C(x) \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Par hypothèse de continuité, si x^* vérifie la LICQ alors tout point réalisable x suffisamment proche de x^* vérifie à son tour la LICQ. Pour de tels points x strictement admissibles et tout $y > 0$, on voit aisément que la jacobienne $\nabla F(w; \mu)$ est non singulière au point (x, y) .

Définition 4.1.3 *La condition suffisante du second ordre est satisfaite en $w^* = (x^*, y^*)$ si on a $d^T \nabla_{xx} L(w^*) d > 0$ pour tout $y^* \in \mathcal{Y}^*$ et tout vecteur non nul d qui vérifie $\nabla c_i(x^*)^T d = 0$, pour tout $i \in \mathcal{A}_*^S$ et $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$ pour tout $i \in \mathcal{A}_*^W$.*

Le résultat ci-dessous a trait à l'existence de minima de la fonction barrière logarithmique. On trouve ce résultat dans (Wright et Orban, 2002, théorème 15) comme un cas particulier de (Wright, 1992, théorème 7).

Théorème 4.1.4 *Supposons que x^* est un point critique du premier ordre qui vérifie la MFCQ et la condition suffisante du second ordre. Soit une suite $\{\mu_k\} \downarrow 0$ où $\mu_k > 0$ pour tout k . Alors*

- i. il existe un voisinage \mathcal{N} de x^* tel que pour tout k suffisamment grand, $\phi(\cdot; \mu_k)$ admet au moins un minimum dans $\mathcal{F}^\circ \cap \mathcal{N}$,*

- ii. toute suite de minima globaux $\{\bar{x}^k\}$ de $\phi(\cdot; \mu_k)$ converge vers x^* ,
- iii. $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{x}^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(\bar{x}^k; \mu_k) = f(x^*)$.

Nous utiliserons le résultat technique suivant (Wright et Orban, 2002, corollaire 19) dans la suite du chapitre 4.

Théorème 4.1.5 *Supposons que x^* est un point critique du premier ordre qui vérifie la MFCQ et la condition suffisante du second ordre. Supposons de plus que $\mathcal{A}_*^W \neq \emptyset$. Considérons ensuite des suites $\{\mu_k\} \downarrow 0$ et $\{\bar{x}^k\} \rightarrow x^*$ où $\mu_k > 0$ et \bar{x}^k est un minimum local de $\phi(\cdot; \mu_k)$ pour tout k . Alors*

$$\|\bar{x}^k - x^*\| = \Theta(\sqrt{\mu_k}).$$

Enfin le résultat suivant tiré des résultats de (Forsgren *et al.*, 2002, théorème 3.12) fournit la convergence des estimations des multiplicateurs de Lagrange.

Théorème 4.1.6 *Supposons que x^* est un point critique de premier ordre qui vérifie la MFCQ et la condition suffisante du second ordre. Soit une suite $\{\mu_k\} \downarrow 0$ avec $\mu_k > 0$ pour tout k . Alors,*

- i. il existe au moins une suite $\{\bar{x}^k\}$ de minimiseurs de $\phi(\cdot; \mu_k)$ qui converge vers x^* ,
- ii. la suite $\{\bar{y}^k\}$ définie par $\bar{y}^k := \mu_k C(\bar{x}^k)^{-1} e$ converge vers un vecteur $\bar{y} \in \mathcal{Y}^*$.

Notons que par définition \bar{x}^k et \bar{y}^k vérifie la condition de complémentarité perturbée,

$$c_i(\bar{x}^k) \bar{y}_i^k = \mu_k \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, m. \quad (4.15)$$

À partir des théorèmes 4.1.5 et 4.1.6 il est aisé de déduire les estimations suivantes.

Lemme 4.1.7 *Soit la suite $\{\bar{x}^k\}$, où \bar{x}^k est un minimum local de la fonction barrière logarithmique $\phi(\cdot; \mu_k)$ qui converge vers x^* et soit la suite \bar{y}^k telle que définie dans le théorème 4.1.6,*

avec $\{\mu_k\} \downarrow 0$. Si x^* vérifie la LICQ alors pour tout k suffisamment grand,

$$c_i(\bar{x}^k) = \Theta(\mu_k) \quad \bar{y}_i^k = \Theta(1) \quad i \in \mathcal{A}_*^S, \quad (4.16a)$$

$$c_i(\bar{x}^k) = \Theta(\sqrt{\mu_k}) \quad \bar{y}_i^k = \Theta(\sqrt{\mu_k}) \quad i \in \mathcal{A}_*^W, \quad (4.16b)$$

$$c_i(\bar{x}^k) = \Theta(1) \quad \bar{y}_i^k = \Theta(\mu_k) \quad i \in \mathcal{I}_*. \quad (4.16c)$$

Preuve. À cause de (4.15), les estimations sur $c_i(\bar{x}^k)$ découlent directement de celles sur \bar{y}_i^k , et réciproquement. Sous l'hypothèse de la LICQ, la partie (ii) du théorème 4.1.6 implique que $\{\bar{y}^k\} \rightarrow y^*$. Pour $i \in \mathcal{A}_*^S$, $y_i^* > 0$ et pour tout k suffisamment grand on a $\frac{1}{2}y_i^* \leq \bar{y}_i^k \leq 2y_i^*$ et donc (4.15) implique (4.16a). De même pour $i \in \mathcal{I}_*$ $c_i(x^*) > 0$ et pour tout k assez grand on a $\frac{1}{2}c_i(x^*) \leq c_i(\bar{x}^k) \leq 2c_i(x^*)$. Ici encore (4.15) implique (4.16c). Enfin pour $i \in \mathcal{A}_*^W$ un développement de Taylor donne $c_i(\bar{x}^k) = \nabla c_i(x^*)^T(\bar{x}^k - x^*) + o(\bar{x}^k - x^*)$. Puisque la LICQ est satisfaite au point x^* on tire du théorème 4.1.5 que $c_i(\bar{x}^k) = \Theta(\bar{x}^k - x^*) = \Theta(\sqrt{\mu_k})$. De nouveau (4.15) implique (4.16b). \square

Nous sommes maintenant en mesure de compléter le théorème 4.1.5 avec une estimation de la distance entre les multiplicateurs de Lagrange exacts \bar{y}^k et les multiplicateurs optimaux y^* . Nous avons tout d'abord besoin d'un cas particulier de (Wright et Orban, 2002) :

Lemme 4.1.8 *Supposons que x^* satisfait les conditions nécessaires du premier ordre (4.2). Pour toute suite $\{\mu_k\} \downarrow 0$ alors la suite d'approximations des multiplicateurs \bar{y}^k vérifie*

$$\|\bar{y}^k - y^*\| = O(\|\bar{x}^k - x^*\|) + O(\mu_k).$$

On en déduit l'estimation suivante de la distance entre \bar{y}^k et y^* .

Corollaire 4.1.9 *Supposons que x^* est un point critique du premier ordre qui vérifie la LICQ et la condition suffisante du second ordre. Supposons en plus que $\mathcal{A}_*^W \neq \emptyset$. Soient des suites $\mu_k \downarrow 0$ et $\{\bar{x}^k\} \rightarrow x^*$ avec $\mu_k > 0$ et \bar{x}^k , un minimum local de $\Phi(\cdot; \mu_k)$ pour tout k . Si $\{\bar{y}^k\}$ est définie comme dans le théorème 4.1.6 alors*

$$\bar{y}^k - y^* = \Theta(\sqrt{\mu_k}).$$

Preuve. Si $i \in \mathcal{A}_*^W \cup \mathcal{I}_*$, en utilisant le fait que $y_i^* = 0$, la définition de \bar{y}^k et les estimations du lemme 4.1.7 on obtient que $\bar{y}_i^k = |\bar{y}_i^k - y_i^*| = \Theta(\sqrt{\mu_k})$. Pour tout $j = 1, \dots, m$ on a

$$(\bar{y}_j^k - y_j^*)^2 \leq \|\bar{y}^k - y^*\|^2.$$

En prenant $j \in \mathcal{A}_*^W \neq \emptyset$, on obtient $|\bar{y}_i^k - y_i^*| = \Omega(\sqrt{\mu_k})$ pour tout $i = 1, \dots, m$. On applique alors le lemme 4.1.8 et le théorème 4.1.5 pour obtenir $\|\bar{y}^k - y^*\| = O(\sqrt{\mu_k})$. \square

Tel que mentionné plus tôt, des critères d'arrêt typiques de l'itération interne dépendent de μ . Considérons les conditions d'arrêt suivantes

$$\|\nabla f(x^k) - \sum_{i=1}^m y_i^k \nabla c_i(x^k)\| \leq \epsilon_k, \quad (4.17a)$$

$$\kappa_L \mu_k \leq c_i(x^k) y_i^k \leq \kappa_U \mu_k, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.17b)$$

$$(c(x^k), y^k) > 0, \quad (4.17c)$$

pour des constantes $\kappa_U > \kappa_L > 0$ et une suite de nombres positifs $\{\epsilon_k\}$ qui tend vers zéro. Nous nous limitons à une analyse asymptotique et supposons donc que la suite $\{w_k\} = \{(x_k, y_k)\}$ obtenue avec les conditions d'arrêt (4.17) est convergente. Puisque par définition $\mu_k \rightarrow 0$ et $\epsilon_k \rightarrow 0$, il est évident que la limite de $\{w_k\}$ est un point critique du premier ordre pour (4.1). Dans la suite du chapitre 4, nous supposons que cette limite est le point w^* des théorèmes 4.1.4, 4.1.5, 4.1.6 et du lemme 4.1.7. Cette hypothèse est raisonnable puisqu'en vertu des hypothèses de ces résultats, x^* est un minimum isolé de (4.1).

Nous définissons les ensembles indicateurs faiblement actif, fortement actif et inactif, au point primal-dual (x, y) , suivants

$$\mathcal{A}^W(x, y, \mu) = \{i = 1, \dots, m \mid c_i(x) \leq \mu^{\frac{1}{2}-\beta} \text{ et } y_i \leq \mu^{\frac{1}{2}-\beta}\}, \quad (4.18a)$$

$$\mathcal{A}^S(x, y, \mu) = \{i \notin \mathcal{A}^W(x, y, \mu) \text{ et } c_i(x) \leq y_i\}, \quad (4.18b)$$

$$\mathcal{A}(x, y, \mu) = \mathcal{A}^S(x, y, \mu) \cup \mathcal{A}^W(x, y, \mu), \text{ et} \quad (4.18c)$$

$$\mathcal{I}(x, y, \mu) = \{1, \dots, m\} \setminus \mathcal{A}(x, y, \mu), \quad (4.18d)$$

pour un paramètre $\beta \in (0, \frac{1}{2})$ fixé.

Par soucis de concision, nous faisons usage dans le reste du chapitre 4 des notations allégées suivantes

$$\mathcal{A}_k^W := \mathcal{A}^W(x^k, y^k, \mu_k),$$

$$\mathcal{A}_k := \mathcal{A}(x^k, y^k, \mu_k),$$

$$\mathcal{A}_k^S := \mathcal{A}^S(x^k, y^k, \mu_k),$$

$$\mathcal{I}_k := \mathcal{I}(x^k, y^k, \mu_k).$$

Notre premier résultat fournit des bornes sur les valeurs de $c_i(x^k)$ et y_i^k pour les différents ensembles de (4.18). La preuve est directe à partir des définitions et de (4.17b).

Lemme 4.1.10 *Si on utilise le test d'arrêt (4.17b) pour les itérations internes alors*

$$\kappa_L \mu_k^{\frac{1}{2}+\beta} \leq c_i(x^k) \leq \mu_k^{\frac{1}{2}-\beta} \quad \text{et} \quad \kappa_L \mu_k^{\frac{1}{2}+\beta} \leq y_i^k \leq \mu_k^{\frac{1}{2}-\beta} \quad i \in \mathcal{A}_k^W, \quad (4.19a)$$

$$c_i(x^k) \leq \kappa_U \mu_k^{\frac{1}{2}+\beta} \quad \text{et} \quad y_i^k > \mu_k^{\frac{1}{2}-\beta} \quad i \in \mathcal{A}_k^S, \quad (4.19b)$$

$$c_i(x^k) > \mu_k^{\frac{1}{2}-\beta} \quad \text{et} \quad y_i^k \leq \kappa_U \mu_k^{\frac{1}{2}+\beta} \quad i \in \mathcal{I}_k. \quad (4.19c)$$

Preuve. Soit $i \in \mathcal{A}_k^W$. De (4.17b), on a que $\kappa_L \mu_k \leq c_i(x^k) y_i^k \leq c_i(x^k) \mu_k^{\frac{1}{2}-\beta}$ duquel on déduit que $c_i(x^k) \geq \kappa_L \mu_k^{\frac{1}{2}+\beta}$. On obtient de la même manière la même borne inférieure sur y_i^k . Les bornes supérieures découlent des définitions de \mathcal{A}_k^W .

Si $i \in \mathcal{A}_k^S$, soit $c_i(x^k) \leq \mu_k^{\frac{1}{2}-\beta} < y_i^k$, soit $\mu_k^{\frac{1}{2}-\beta} < c_i(x^k) \leq y_i^k$, mais dans tous les cas $y_i^k > \mu_k^{\frac{1}{2}-\beta}$. Les bornes sur $c_i(x^k)$ résultent du membre de droite de (4.17b).

Le raisonnement pour montrer les inégalités pour $i \in \mathcal{I}_k$ est semblable. \square

Le lemme 4.1.10 suggère que les valeurs des contraintes et des multiplicateurs dans \mathcal{A}_k^W s'approchent asymptotiquement de zéro à une vitesse plus lente que la solution exacte \bar{w}^k du lemme 4.1.7. Plus β est grand, plus le taux de convergence est petit et plus l'écart entre les solutions approchée et exacte est grand. Comme on le verra par la suite les bornes du lemme 4.1.10 sont pessimistes. Dans le reste de cette section nous établissons que les ensembles indicateurs (4.18) sont en fait *exacts* en ce sens qu'ils coïncident asymptotiquement avec (4.10) pour toute valeur $\beta \in (0, \frac{1}{2})$. En s'aidant de (4.17b), il n'est pas difficile de voir que pour tout k assez grand les estimations (4.18b) et (4.18d) satisfont $\mathcal{I}_* \subseteq \mathcal{I}_k$ et $\mathcal{A}_*^S \subseteq \mathcal{A}_k^S$. L'inclusion $\mathcal{A}_*^W \subseteq \mathcal{A}_k^W$ est un peu plus subtile à établir. Puisque $\{\mathcal{A}_*^W, \mathcal{A}_*^S, \mathcal{I}_*\}$ et $\{\mathcal{A}_k^W, \mathcal{A}_k^S, \mathcal{I}_k\}$ forment deux partitions de $\{1, \dots, m\}$ pour tout k , on doit avoir l'égalité entre ces ensembles pour tout k assez grand. Ceci est lié à (Monteiro et Wright, 1994, lemme 3.1) et est résumé dans le théorème 4.1.13 ci-dessous. Le corollaire 4.1.14 resserre de manière significative les bornes obtenues au lemme 4.1.10.

Avant d'arriver à ce théorème, nous avons besoin des deux résultats techniques suivants. Le premier résultat concerne le taux de convergence vers zéro de la plus petite valeur singulière de la matrice Jacobienne de $F(\cdot; \mu_k)$ pour $\mu_k \rightarrow 0$ en l'absence de la complémentarité stricte. Le second résultat donne une estimation de la distance entre une solution approchée primale-duale w^k qui vérifie (4.17) et une solution exacte \bar{w}^k .

Lemme 4.1.11 *Soit la suite $\{\bar{w}^k\}$ du théorème 4.1.6. Si x^* vérifie la LICQ et la condition suffisante du second ordre, alors pour tout k assez grand, la plus petite valeur singulière de $\nabla F(\bar{w}^k; \mu_k)$ satisfait*

$$\sigma_{\min}(\nabla F(\bar{w}^k; \mu_k)) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{si } \mathcal{A}_*^W = \emptyset, \\ \Theta(\sqrt{\mu_k}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Le cas $\mathcal{A}_*^W = \emptyset$ est évident puisque la valeur limite du jacobien $\nabla F(w^*; 0)$ est non singulière. Nous allons donc uniquement considérer le cas où on a des contraintes faiblement actives.

La matrice jacobienne de F a la structure en blocs suivante

$$\nabla F(\bar{w}^k; \mu_k) = \begin{bmatrix} \nabla_{xx}L(\bar{w}^k) & -J_{\mathcal{A}_*^W}(\bar{x}^k)^T & -J_{\mathcal{A}_*^S}(\bar{x}^k)^T & -J_{\mathcal{I}_*}(\bar{x}^k)^T \\ \bar{Y}_{\mathcal{A}_*^W}^k J_{\mathcal{A}_*^W}(\bar{x}^k) & C_{\mathcal{A}_*^W}(\bar{x}^k) & & \\ \bar{Y}_{\mathcal{A}_*^S}^k J_{\mathcal{A}_*^S}(\bar{x}^k) & & C_{\mathcal{A}_*^S}(\bar{x}^k) & \\ \bar{Y}_{\mathcal{I}_*}^k J_{\mathcal{I}_*}(\bar{x}^k) & & & C_{\mathcal{I}_*}(\bar{x}^k) \end{bmatrix}.$$

Puisque x^* vérifie la LICQ, un argument de continuité montre que pour des k assez grands, la sous matrice de $J(\bar{x}^k)$ composée des lignes correspondant aux indices dans $\mathcal{A}_*^W \cup \mathcal{A}_*^S$ est de rang maximal. À l'aide de (4.16) et de l'hypothèse 4.1.1, on obtient les estimations suivantes pour la norme de chacun des blocs de la jacobienne de F

$$\nabla F(\bar{w}^k; \mu_k) = \begin{bmatrix} O(1) & \Theta(1) & \Theta(1) & O(1) \\ \Theta(\sqrt{\mu_k}) & \Theta(\sqrt{\mu_k}) & & \\ \Theta(1) & & \Theta(\mu_k) & \\ \Theta(\mu_k) & & & \Theta(1) \end{bmatrix}.$$

Rappelons que puisque $\nabla F(\bar{w}^k; \mu_k)$ est carrée, alors

$$\sigma_{\min}(\nabla F(\bar{w}^k; \mu_k)) = \sigma_{\min}(\nabla F(\bar{w}^k; \mu_k)^T) = \min_{\|z\|_2=1} \|\nabla F(\bar{w}^k; \mu_k)^T z\|_2. \quad (4.20)$$

Considérons alors le vecteur $e_{[i]} \in \mathbb{R}^{n+m}$ dont toutes les composantes sont nulles sauf la composante $n+i$ avec $i \in \mathcal{A}_*^W$ qui vaut 1. Puisque les valeurs singulières non nulles d'une matrice sont les mêmes que celle de sa transposée et comme

$\|\nabla F(\bar{w}^k; \mu_k)\|^T e_{[i]} \|_2 = \Theta(\sqrt{\mu_k})$ on obtient que

$$\sigma_{\min}(\nabla F(\bar{w}^k; \mu_k)) = O(\sqrt{\mu_k}).$$

Pour simplifier les notations posons $\nabla \bar{F}_k := \nabla F(\bar{w}^k; \mu_k)$ et $\sigma_k := \sigma_{\min}(\nabla \bar{F}_k)$. Les conditions nécessaire et suffisante d'optimalité pour (4.20) se réécrivent

$$\nabla \bar{F}_k \nabla \bar{F}_k^T z = \sigma_k^2 z, \quad \|z\|_2 = 1.$$

Définissons alors

$$W_k := \begin{bmatrix} J_{\mathcal{A}_*^w}(\bar{x}^k)^T \bar{Y}_{\mathcal{A}_*^w}^k \\ C_{\mathcal{A}_*^w}(\bar{x}^k) \end{bmatrix}.$$

On vérifie aisément que le bloc (2, 2) de la matrice $\nabla \bar{F}_k \nabla \bar{F}_k^T$ est

$$W_k^T W_k = \bar{Y}_{\mathcal{A}_*^w}^k J_{\mathcal{A}_*^w}(\bar{x}^k) J_{\mathcal{A}_*^w}(\bar{x}^k)^T \bar{Y}_{\mathcal{A}_*^w}^k + C_{\mathcal{A}_*^w}(\bar{x}^k)^2 = \Theta(\mu_k).$$

Nous aurons établi notre résultat si nous pouvons identifier \bar{z} tel que $\|\bar{z}\| = 1$ et $\bar{z}^T W_k^T W_k \bar{z} = \Theta(\mu_k)$, car ce faisant il sera suffisant de considérer $z := (0, \bar{z}, 0, 0)$. Cela revient à prouver que la plus petite valeur singulière non nulle de W_k est en $\Theta(\sqrt{\mu_k})$. En fait toutes les valeurs singulières de W_k sont en $\Theta(\sqrt{\mu_k})$. En effet si $\sigma > 0$ est une valeur singulière de W_k alors il existe des vecteurs unitaires (u, v) et w tels que, en particulier,

$$\begin{bmatrix} J_{\mathcal{A}_*^w}(\bar{x}^k)^T \bar{Y}_{\mathcal{A}_*^w}^k \\ C_{\mathcal{A}_*^w}(\bar{x}^k) \end{bmatrix} w = \begin{bmatrix} J_{\mathcal{A}_*^w}(\bar{x}^k)^T \bar{Y}_{\mathcal{A}_*^w}^k w \\ C_{\mathcal{A}_*^w}(\bar{x}^k) w \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

L'hypothèse 4.1.1 et le fait que x^* satisfait la LICQ implique que $J_{\mathcal{A}_*^w}(\bar{x}^k)$ est de plein rang pour tout k assez grand. À l'aide du lemme 4.1.7 et du fait que (u, v) et w sont unitaires on obtient

$$\|J_{\mathcal{A}_*^w}(\bar{x}^k)^T \bar{Y}_{\mathcal{A}_*^w}^k w\| = \Theta(\sqrt{\mu_k}) \quad \text{et} \quad \|C_{\mathcal{A}_*^w}(\bar{x}^k) w\| = \Theta(\sqrt{\mu_k}).$$

Cela établit que $\sigma = O(\sqrt{\mu_k})$. \square

Nous venons d'établir que $\sigma_{\min} = O(\sqrt{\mu_k})$. Nous travaillons à établir l'autre borne $\sigma_{\min} = \Omega(\sqrt{\mu_k})$ que nous observons dans nos résultats numériques.

Nous supposons dans la suite du chapitre 4 que $\sigma_{\min} = \Theta(\sqrt{\mu_k})$.

Lemme 4.1.12 *Soit la suite $\{\bar{w}^k\}$ du théorème 4.1.6 et supposons que x^* satisfait la LICQ*

et la condition suffisante du second ordre. Si w^k vérifie les conditions (4.17) avec $\epsilon_k = O(\mu_k)$, alors pour tout k assez grand

$$w^k - \bar{w}^k = O(\sqrt{\mu_k}). \quad (4.21)$$

Preuve. Soit le développement de Taylor de $F(\cdot; \mu_k)$ autour de \bar{w}^k

$$F(w^k; \mu_k) = F(\bar{w}^k; \mu_k) + \nabla F(\bar{w}^k; \mu_k)(w^k - \bar{w}^k) + o(w^k - \bar{w}^k).$$

Par définition, $F(\bar{w}^k; \mu_k) = 0$. De plus, $\nabla F(\bar{w}^k; \mu_k)$ est non singulière et reste uniformément bornée. Il s'en suit alors que pour tout k assez grand,

$$w^k - \bar{w}^k = \Theta(\nabla F(\bar{w}^k; \mu_k)^{-1} F(w^k; \mu_k)).$$

Les critères d'arrêt (4.17) impliquent que $F(w^k; \mu_k) = O(\mu_k)$. En vertu du lemme 4.1.11, on obtient (4.21). \square

Nous sommes maintenant prêts à établir l'égalité entre les ensembles indicateurs et leurs équivalents asymptotiques.

Théorème 4.1.13 *Supposons que la suite $\{w_k\}$ converge vers w^* , que x^* vérifie la LICQ et la condition suffisante du second ordre et qu'une série d'itérations internes est terminée dès que la condition (4.17) est satisfaite pour une suite de nombres positifs $\{\mu_k\} \downarrow 0$ et $\epsilon_k = O(\mu_k)$. Alors pour tout k suffisamment grand, on a*

$$\mathcal{I}_k = \mathcal{I}_*, \quad \mathcal{A}_k^S = \mathcal{A}_*^S, \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_k^W = \mathcal{A}_*^W.$$

Preuve. Supposons que $i \in \mathcal{A}_*^S$, c'est-à-dire $c_i(x_k) \rightarrow 0$ et $y_i^k \rightarrow y_i^* > 0$. Pour k assez grand on a $0 < \frac{1}{2}y_i^* \leq y_i^k \leq 2y_i^*$ —et donc $i \notin \mathcal{A}_k^W$ —et $c_i(x_k) \leq y_i^k$. D'où $i \in \mathcal{A}_k^S$. On montre de la même manière que $\mathcal{I}_* \subseteq \mathcal{I}_k$. Le résultat sera établi si nous pouvons montrer que $\mathcal{A}_*^W \subseteq \mathcal{A}_k^W$. À cette fin, nous allons supposer que $\mathcal{A}_*^W \neq \emptyset$. À l'aide du théorème 4.1.5 et du lemme 4.1.12, un développement de Taylor conduit à, pour tout $i \in \mathcal{A}_*^W$

$$c_i(x^k) = \Theta(\|x^k - x^*\|) = \Theta(\|x^k - \bar{x}^k\| + \|\bar{x}^k - x^*\|) = O(\sqrt{\mu_k}) \leq \mu_k^{\frac{1}{2}-\beta},$$

où nous avons utilisé la LICQ et l'inégalité triangulaire. De même en s'aidant de (4.16b), on a immédiatement

$$y_i^k = |y_i^k - y_i^*| \leq |y_i^k - \bar{y}_i^k| + |\bar{y}_i^k - y_i^*| = O(\sqrt{\mu_k}) + \Theta(\sqrt{\mu_k}) = \Theta(\sqrt{\mu_k}) \leq \mu_k^{\frac{1}{2}-\beta}.$$

Il s'en suit que pour tout k assez grand, on a $i \in \mathcal{A}_k^W$. \square

En utilisant (4.17b) et le théorème 4.1.13, on tire directement que le lemme 4.1.7 est aussi vérifié à la solution approchée w^k tel qu'énoncé dans le corollaire suivant.

Corollaire 4.1.14 *Supposons que la suite $\{w_k\}$ converge vers w^* et que x^* vérifie la LICQ et une condition suffisante du second ordre. Supposons aussi qu'une série d'itérations internes se terminent aussitôt que (4.17) est satisfaite, pour une suite de nombres positifs $\{\mu_k\} \downarrow 0$ et $\epsilon_k = O(\mu_k)$. Alors pour tout k suffisamment grand pour que le théorème 4.1.13 soit vérifié, on a*

$$c_i(x^k) = \Theta(\mu_k) \quad y_i^k = \Theta(1) \quad i \in \mathcal{A}_k^S, \quad (4.22a)$$

$$c_i(x^k) = \Theta(\sqrt{\mu_k}) \quad y_i^k = \Theta(\sqrt{\mu_k}) \quad i \in \mathcal{A}_k^W, \quad (4.22b)$$

$$c_i(x^k) = \Theta(1) \quad y_i^k = \Theta(\mu_k) \quad i \in \mathcal{I}_k. \quad (4.22c)$$

Preuve. Pour $i \in \mathcal{A}_k^S = \mathcal{A}_*^S$, $\{y_i^k\} \rightarrow y_i^* > 0$ et donc pour k assez grand, $0 < \frac{1}{2}y_i^* \leq y_i^k \leq 2y_i^*$. Ceci combiné avec (4.17b) conduit à (4.22a). La preuve pour (4.22c) est similaire. Pour $i \in \mathcal{A}_k^W = \mathcal{A}_*^W$, le lemme 4.1.12 donne $y_i^k = \bar{y}_i^k + (y_i^k - \bar{y}_i^k) = O(\sqrt{\mu_k})$, c'est-à-dire qu'il existe une constante $\kappa_y > 0$ telle que $y_i^k \leq \kappa_y \sqrt{\mu_k}$. Ce qui avec (4.17b), donne $c_i(x^k) \geq (\kappa_L/\kappa_y)\sqrt{\mu_k}$. Par le lemme 4.1.12 encore et la LICQ, on a $c_i(x^k) = c_i(\bar{x}^k) + \Theta(x^k - \bar{x}^k) = O(\sqrt{\mu_k})$. Par conséquent la première borne de (4.22b) suit. En usant encore de (4.17b), on établit la seconde borne de la même manière. \square

4.2 De nouveaux ensembles de multiplicateurs

À partir de maintenant, nous supposons que le paramètre barrière est mis à jour par la règle superlinéaire suivante

$$\mu_{k+1} = \mu_k^{1+\sigma}, \quad \sigma \in (0, 1). \quad (4.23)$$

La formule de mise à jour (4.8) combinée avec (4.23) et (4.18) conduit à la définition suivante des multiplicateurs mis à l'échelle

$$y_i^{k+} := \begin{cases} \mu_k^{\sigma/2} y_i^k & i \in \mathcal{A}_k^W, \\ y_i^k & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.24)$$

Les estimations suivantes sur les distances découlent directement des résultats de la section précédente et de (4.24).

Lemme 4.2.1 *Si y_i^{k+} est définie comme dans (4.24) alors*

- i. $w^k - w^{k+} = \Theta(\sqrt{\mu_k})$,
- ii. $w^{k+} - \bar{w}^k = \Theta(\sqrt{\mu_k})$,
- iii. $w^{k+} - \bar{w}^{k+1} = \Theta(\sqrt{\mu_k})$,
- iv. $w^k - w^* = \Theta(\sqrt{\mu_k})$.

Preuve. En vertu du corollaire 4.1.14 et de (4.24), on a

$$w^k - w^{k+} = y_{\mathcal{A}_k^W}^k - y_{\mathcal{A}_k^W}^{k+} = (1 - \mu_k^{\frac{1}{2}\sigma}) y_{\mathcal{A}_k^W}^k = \Theta(\sqrt{\mu_k}),$$

ce qui établit la première borne. La deuxième borne découle de la première et du lemme 4.1.12. La troisième borne découle du (ii), du théorème 4.1.5, du lemme 4.1.7 et de l'inégalité triangulaire. La dernière borne est déduite du théorème 4.1.5, du corollaire 4.1.9, du lemme 4.1.12 et de l'inégalité triangulaire. \square

Lemme 4.2.2 *Si le critère d'arrêt (4.17b) est utilisé pour les itérations internes et si y^{k+} est tel que défini dans (4.24), alors il existe des constantes $\kappa_S > 0$ et $\kappa_I > 0$ telles que pour tout k suffisamment grand,*

$$\kappa_L \mu_k^{\frac{1}{2}\sigma} \leq \frac{y_i^{k+}}{c_i(x^k)} \leq \kappa_L^{-1} \mu_k^{\frac{1}{2}\sigma} \quad i \in \mathcal{A}_k^W, \quad (4.25a)$$

$$\kappa_S \mu_k \leq \frac{c_i(x^k)}{y_i^{k+}} \leq \kappa_S^{-1} \mu_k \quad i \in \mathcal{A}_k^S, \quad (4.25b)$$

$$\kappa_I \mu_k \leq \frac{y_i^{k+}}{c_i(x^k)} \leq \kappa_I^{-1} \mu_k \quad i \in \mathcal{I}_k. \quad (4.25c)$$

Preuve. Les bornes (4.25a) proviennent directement du lemme 4.1.10 et de (4.24). Supposons que l'indice k est suffisamment grand pour que le théorème 4.1.13 et le corollaire 4.1.14 s'appliquent. Pour $i \in \mathcal{A}_k^S \cup \mathcal{I}_k$, $y_i^{k+} = y_i^k$. Les bornes (4.25b) et (4.25c) suivent alors de (4.22a) et (4.22c), respectivement. \square

Pour rester concis, nous utilisons la notation suivante dans le reste du chapitre 4

$$\mathcal{A}_{k+}^W := \mathcal{A}^W(x^k, y^{k+}, \mu_k), \quad \mathcal{A}_{k+}^S := \mathcal{A}^S(x^k, y^{k+}, \mu_k), \quad \mathcal{I}_{k+} := \mathcal{I}(x^k, y^{k+}, \mu_k).$$

Puisque notre intérêt ne porte que sur le comportement asymptotique, dans les futurs résultats nous supposons que le paramètre barrière est inférieur à 1 et converge vers 0 lorsque élevé à une puissance positive à plusieurs reprises.

Le prochain lemme montre qu'asymptotiquement, les ensembles indicateurs ne sont pas modifiés par la mise à jour des multiplicateurs.

Lemme 4.2.3 *Supposons que y^{k+} est défini comme dans (4.24). Alors pour k assez grand, $\mathcal{A}_{k+}^W = \mathcal{A}_k^W$, $\mathcal{A}_{k+}^S = \mathcal{A}_k^S$ et $\mathcal{I}_{k+} = \mathcal{I}_k$.*

Preuve. Soit $i \in \mathcal{A}_k^W$. De (4.24) on a $y_i^{k+} = \mu_k^{\frac{1}{2}\sigma} y_i^k \leq \mu_k^{\frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2} - \beta} \leq \mu_k^{\frac{1}{2} - \beta}$ et donc $i \in \mathcal{A}_{k+}^W$. Inversement, si $i \in \mathcal{A}_{k+}^W$, supposons que $i \notin \mathcal{A}_k^W$. Alors (4.24) implique que $y_i^k = y_i^{k+} \leq \mu_k^{\frac{1}{2} - \beta}$, ce qui est contradictoire.

La définition (4.18b) et (4.24) conduisent à $\mathcal{A}_{k+}^S = \{i \notin \mathcal{A}_{k+}^W \text{ et } c_i(x^k) \leq y_i^{k+}\} = \{i \notin \mathcal{A}_k^W \text{ et } c_i(x^k) \leq y_i^k\} = \mathcal{A}_k^S$.

On déduit directement de (4.18d) et des deux résultats précédents que $\mathcal{I}_{k+} = \{1, \dots, m\} \setminus (\mathcal{A}_{k+}^S \cup \mathcal{A}_{k+}^W) = \{1, \dots, m\} \setminus (\mathcal{A}_k^S \cup \mathcal{A}_k^W) = \mathcal{I}_k$. \square

Une conséquence directe du résultat précédent et du théorème 4.1.13 est que les ensembles indicateurs associés aux multiplicateurs mis à l'échelle coïncident aussi asymptotiquement avec les ensembles actifs optimaux.

Notons $\mathcal{S}(x, y)$ et $\mathcal{B}(x, y)$, les ensembles des indices des « petites » et « grandes » composantes de $c_i(x)$, respectivement

$$\mathcal{S}(x, y) := \{i = 1, \dots, m \mid c_i(x) \leq y_i\}, \quad (4.26a)$$

$$\mathcal{B}(x, y) := \{1, \dots, m\} \setminus \mathcal{S}(x, y). \quad (4.26b)$$

Le résultat suivant montre qu'avec la mise à jour (4.24) des variables duales faiblement actives, les « petites » contraintes sont les contraintes fortement actives tandis que les contraintes faiblement actives font partie des « grandes » contraintes. En outre ce partitionnement des contraintes est possible avec une mise à jour superlinéaire du paramètre barrière.

Tout comme précédemment, on note $\mathcal{S}_k, \mathcal{S}_{k+}, \mathcal{B}_k$ et \mathcal{B}_{k+} les ensembles $\mathcal{S}(x^k, y^k), \mathcal{S}(x^k, y^{k+}), \mathcal{B}(x^k, y^k)$ et $\mathcal{B}(x^k, y^k)$, respectivement.

Lemme 4.2.4 *Supposons que le critère d'arrêt utilisé pour les itérations internes est (4.17b). Si le paramètre barrière est mis à jour comme dans (4.23) et si les variables duales sont mises à l'échelle par (4.24), alors pour tout k suffisamment grand, on a*

$$\mathcal{S}_{k+} = \mathcal{A}_k^S \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_{k+} = \mathcal{A}_k^W \cup \mathcal{I}_k. \quad (4.27)$$

Plus encore pour tout k suffisamment grand,

$$\frac{c_i(x^k)}{y_i^{k+}} \rightarrow 0 \quad \text{pour } i \in \mathcal{S}_{k+}, \quad \text{et} \quad \frac{y_i^{k+}}{c_i(x^k)} \rightarrow 0 \quad \text{pour } i \in \mathcal{B}_{k+}. \quad (4.28)$$

Preuve. L'inclusion $\mathcal{A}_k^S \subseteq \mathcal{S}_{k+}$ découle directement de (4.18) et de (4.24). Pour montrer l'inclusion inverse, observons que si $i \in \mathcal{S}_{k+}$ on a $c_i(x^k) \leq y_i^{k+}$ et il est impossible que $i \in \mathcal{A}_k^W$ car sinon, les membres de gauche de (4.17b) et (4.24) impliqueraient que

$$\kappa_L \mu_k \leq c_i(x^k) y_i^k \leq y_i^{k+} y_i^k = \mu_k^{\sigma/2} (y_i^k)^2 = \Theta(\mu_k^{1+\frac{1}{2}\sigma}), \quad (4.29)$$

Donc $i \notin \mathcal{A}_k^W$. En conséquence, $y_i^{k+} = y_i^k$ et $c_i(x^k) \leq y_i^k$, ce qui signifie que $i \in \mathcal{A}_k^S$.

De même, on voit immédiatement que $\mathcal{I}_k \subseteq \mathcal{B}_{k+}$. Pour tout $i \in \mathcal{A}_k^W$ on a $y_i^{k+} = \mu_k^{\sigma/2} y_i^k$. On ne peut avoir $c_i(x^k) \leq y_i^{k+}$ car sinon comme ci-dessus le membre de gauche de (4.17b) impliquerait (4.29) qui contredit nos hypothèses, et donc $i \in \mathcal{B}_{k+}$. L'inclusion $\mathcal{B}_{k+} \subseteq \mathcal{A}_k^W \cup \mathcal{I}_k$ se montre par un argument similaire. Nous avons donc établi (4.27).

La preuve de (4.28) découle directement du lemme 4.2.2. \square

Soit une suite $\{(x^k, y^k)\}$ vérifiant (4.17) et la suite mise à jour $\{(x^k, y^{k+})\}$ où y^{k+} est définie comme dans (4.24). Il est clair, en vertu de (4.17) et de nos hypothèses de continuité sur f et c_i , que toute valeur d'adhérence de $\{(x^k, y^k)\}$ satisfait (4.2). Compte tenu de (4.17a) et (4.24) nous avons aussi

$$\begin{aligned} \|\nabla f(x^k) - \sum_{i=1}^m y_i^{k+} \nabla c_i(x^k)\| &\leq \|\nabla f(x^k) - \sum_{i=1}^m y_i^k \nabla c_i(x^k)\| + \sum_{i \in \mathcal{A}_k^W} |y_i^{k+} - y_i^k| \|\nabla c_i(x^k)\| \\ &\leq \epsilon_k + \sum_{i \in \mathcal{A}_k^W} y_i^k (1 - \mu_k^{\sigma/2}) \|\nabla c_i(x^k)\|. \end{aligned}$$

En passant à la limite, le terme du membre de droite de l'expression ci-dessus converge vers zéro car $\epsilon_k \rightarrow 0$ par définition et aussi à cause de (4.19a). De même en invoquant (4.17b), (4.19a) et (4.24) encore, nous avons que pour tout $i \in \mathcal{A}_k^W$,

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} c_i(x^k) y_i^{k+} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k^{\sigma/2} c_i(x^k) y_i^k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \kappa_U \mu_k^{1+\sigma/2} = 0.$$

Par conséquent tout point d'adhérence de $\{(x^k, y^{k+})\}$ vérifie également (4.2). On peut montrer de la même manière que tout point d'adhérence de $\{(x^k, y^k)\}$ est aussi un point d'adhérence de $\{(x^k, y^{k+})\}$, puisque les seules composantes de y^k affectées par (4.24) sont celles dans \mathcal{A}_k^W et ces dernières convergent vers zéro.

Nous fermons la section avec des bornes sur la distance entre les quantités primales et duales utilisées dans le calcul du pas de Newton.

Lemme 4.2.5 *Il existe des constantes $\kappa_1 > 0$ et $\kappa_2 > 0$ telles que pour k suffisamment grand*

$$\kappa_1 \mu_k \leq |c_i(x^k) - \frac{\mu_{k+1}}{y_i^k}| \leq \kappa_2 \mu_k, \quad i \in \mathcal{A}_k^S, \quad (4.30)$$

$$\kappa_1 \sqrt{\mu_k} \leq |y_i^k - \frac{\mu_{k+1}}{c_i(x^k)}| \leq \kappa_2 \sqrt{\mu_k}, \quad i \in \mathcal{A}_k^W, \quad (4.31)$$

$$\kappa_1 \mu_k \leq |y_i^k - \frac{\mu_{k+1}}{c_i(x^k)}| \leq \kappa_2 \mu_k, \quad i \in \mathcal{I}_k. \quad (4.32)$$

Preuve. Observons que $y_i^k \rightarrow y_i^* > 0$ pour tout $i \in \mathcal{A}_k^S$, et $c_i(x^k) \rightarrow c_i(x^*) > 0$ pour $i \in \mathcal{I}_k$. Donc en choisissant k suffisamment grand

$$\frac{1}{2} y_i^* \leq y_i^k \leq 2 y_i^*, \quad i \in \mathcal{A}_k^S,$$

et

$$\frac{1}{2} c_i(x^*) \leq c_i(x^k) \leq 2 c_i(x^*), \quad i \in \mathcal{I}_k.$$

Ce résultat avec (4.17b) nous donne

$$\frac{\kappa_L}{2 y_i^*} \mu_k \leq c_i(x^k) \leq \frac{2 \kappa_U}{y_i^*} \mu_k \quad \text{et} \quad \frac{\mu_{k+1}}{2 y_i^*} \leq \frac{\mu_{k+1}}{y_i^k} \leq \frac{2 \mu_{k+1}}{y_i^*}, \quad i \in \mathcal{A}_k^S,$$

et

$$\frac{\kappa_L}{2 c_i(x^*)} \mu_k \leq y_i^k \leq \frac{2 \kappa_U}{c_i(x^*)} \mu_k \quad \text{et} \quad \frac{\mu_{k+1}}{2 c_i(x^*)} \leq \frac{\mu_{k+1}}{c_i(x^k)} \leq \frac{2 \mu_{k+1}}{c_i(x^*)}, \quad i \in \mathcal{I}_k.$$

Le résultat découle alors du fait que $\mu_{k+1} = o(\mu_k)$. On établit (4.31) de manière similaire en combinant (4.22b) avec (4.23). \square

4.3 Convergence superlinéaire

Nous abordons ici la question de savoir comment atteindre les conditions d'arrêt (4.17) à l'itération $k + 1$, à partir de l'itéré mis à jour (x^k, y^{k+}) . Une approche classique est de

linéariser le système primal-dual (4.4) autour de (x^k, y^{k+}) . Pour alléger l'écriture et puisque les ensembles \mathcal{S}_k et \mathcal{B}_k se stabilisent éventuellement et sont égaux à $\mathcal{S}_* = \mathcal{A}_*^S$ et $\mathcal{B}_* = \mathcal{A}_*^W \cup \mathcal{I}_*$, respectivement, nous allons utiliser les notations simplifiées suivantes $\mathcal{S} = \mathcal{S}_*$, $\mathcal{W} := \mathcal{A}_*^W$ et $\mathcal{I} = \mathcal{I}_*$. Nous notons également

$$y_{\mathcal{S}} := y_{\mathcal{A}_*^S}, \quad y_{\mathcal{W}} := y_{\mathcal{A}_*^W}, \quad y_{\mathcal{I}} := y_{\mathcal{I}_*}.$$

Dans ce qui suit, nous supposons que $\{w^k\} \rightarrow w^*$ et que w^* satisfait la LICQ et la condition suffisante du second ordre—voir définition 4.1.3 Le partitionnement des contraintes (4.27) au point (x^k, y^+) induit les partitions correspondantes des matrices $J(x^k)$, $C(x^k)$ et Y^+

$$J(x^k) = \begin{bmatrix} J_{\mathcal{B}}(x^k) & J_{\mathcal{S}}(x^k) \end{bmatrix}, \quad C(x^k) = \begin{bmatrix} C_{\mathcal{B}}(x^k) \\ C_{\mathcal{S}}(x^k) \end{bmatrix}, \quad Y^{k+} = \begin{bmatrix} Y_{\mathcal{B}}^{k+} \\ Y_{\mathcal{S}}^k \end{bmatrix},$$

où les sous-matrices sont évaluées implicitement au point (x^k, y^{k+}) . Le système (4.4) se réécrit sous la forme symétrique suivante

$$\begin{bmatrix} H_{k+} & J_{\mathcal{B}}(x^k)^T & J_{\mathcal{S}}(x^k)^T \\ J_{\mathcal{B}}(x^k) & -C_{\mathcal{B}}(x^k)(Y_{\mathcal{B}}^{k+})^{-1} & \\ J_{\mathcal{S}}(x^k) & & -C_{\mathcal{S}}(Y_{\mathcal{S}}^k)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ -\Delta y_{\mathcal{B}} \\ -\Delta y_{\mathcal{S}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^T(x^k)y^{k+} - \nabla f(x^k) \\ \mu_{k+1}(Y_{\mathcal{B}}^{k+})^{-1}e - c_{\mathcal{B}}(x^k) \\ \mu_{k+1}(Y_{\mathcal{S}}^k)^{-1}e - c_{\mathcal{S}}(x^k) \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

où $H_{k+} := H(x^k, y^{k+})$, et nous avons utilisé l'identité $y_{\mathcal{S}}^{k+} = y_{\mathcal{S}}^k$. En pivotant autour du bloc (2, 2) dans la même veine que Gould (1986), on obtient le système réduit équivalent

$$\begin{bmatrix} \bar{H}_{k+} & J_{\mathcal{S}}(x^k)^T \\ J_{\mathcal{S}}(x^k) & -C_{\mathcal{S}}(x^k)(Y_{\mathcal{S}}^k)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ -\Delta y_{\mathcal{S}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{\mathcal{S}}(x^k)^T y_{\mathcal{S}} + J_{\mathcal{B}}(x^k)^T y_{\mathcal{B}}^{\text{P},k} - \nabla f(x^k) \\ \mu_{k+1}Y_{\mathcal{S}}^{-1}e - c_{\mathcal{S}}(x^k) \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

où on a défini

$$\bar{H}_{k+} := H_{k+} + J_{\mathcal{B}}(x^k)^T C_{\mathcal{B}}(x^k)^{-1} Y_{\mathcal{B}}^{k+} J_{\mathcal{B}}(x^k),$$

et où $y_{\mathcal{B}}^{\text{P},k} := y_{\mathcal{B}}(x^k, \mu_{k+1}) = \mu_{k+1} C_{\mathcal{B}}(x^k)^{-1} e$ sont les estimations des multiplicateurs primaux au point x^k , calculées avec le paramètre barrière μ_{k+1} . Une fois Δx et $\Delta y_{\mathcal{S}}$ évalués à partir de (4.34), on peut obtenir $\Delta y_{\mathcal{B}}$ par la formule

$$\Delta y_{\mathcal{B}} = y_{\mathcal{B}}^{\text{P},k} - y_{\mathcal{B}}^{k+} - Y_{\mathcal{B}}^{k+} C_{\mathcal{B}}(x^k)^{-1} J_{\mathcal{B}}(x^k) \Delta x. \quad (4.35)$$

Soit (x^*, y^*) un point d'adhérence de $\{(x^k, y^k)\}$. En passant à la limite avec une sous-suite de $\{(x^k, y^k)\}$ appropriée, il découle de l'hypothèse 4.1.1 et du lemme 4.2.4 que la matrice

coefficient du système réduit (4.34) demeure bornée et converge vers la matrice non singulière

$$\begin{bmatrix} H(x^*, y^*) & J_S(x^*)^T \\ J_S(x^*) & 0 \end{bmatrix}.$$

Par hypothèse de continuité, pour tout (x, y) suffisamment proche de (x^*, y^*) , la matrice coefficient de (4.34) est uniformément bornée de même que son inverse.

Le lemme technique suivant nous sera utile, voir par exemple (Lu et Shiou, 2002) pour plus de résultats de ce type.

Lemme 4.3.1 *Soit la matrice bloc*

$$M := \begin{bmatrix} A & B^T \\ B & D \end{bmatrix}$$

où A et D sont carrées et D est non singulière. Alors M est non singulière si et seulement si le complément de Schur $S := A - B^T D^{-1} B$ est non singulier et

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} S^{-1} & -S^{-1} B^T D^{-1} \\ -D^{-1} B S^{-1} & D^{-1} + D^{-1} B S^{-1} B^T D^{-1} \end{bmatrix}.$$

Pour étudier les propriétés de convergence locale des méthodes de points intérieurs avec la mise à jour des multiplicateurs, nous devons d'abord déterminer la taille asymptotique du premier pas de Newton pour un nouveau tour d'itérations internes.

Lemme 4.3.2 *Supposons que w^k vérifie (4.17) avec $\epsilon = O(\sqrt{\mu_k})$ que y^{k+} est défini par (4.24) et que \mathcal{S} est non vide. Soit Δw le pas de Newton calculé selon (4.34)–(4.35). Alors $\Delta x = \Theta(\mu_k)$, $\Delta y_S = \Theta(\sqrt{\mu_k})$, $\Delta y_W = \Theta(\mu_k^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sigma})$ et $\Delta y_I = \Theta(\mu_k)$.*

Preuve. Débutons par une borne sur la taille du second membre de (4.34). De (4.17a) et du lemme 4.2.5 on a

$$\begin{aligned} J_S^T(x^k) y_S^k + J_B(x^k)^T y_B^{P,k} - \nabla f(x^k) &= (J^T(x^k) y^k - \nabla f(x^k)) + J_B(x^k)^T (y_B^{P,k} - y_B^k) \\ &\leq \epsilon_k + \Theta(\sqrt{\mu_k}) \\ &= \Theta(\sqrt{\mu_k}). \end{aligned}$$

D'un autre coté, en usant du lemme 4.2.5 une fois de plus il vient que

$$\mu_{k+1}(Y_S^k)^{-1}e - c_S(x^k) = \Theta(\mu_k).$$

On a donc établi que le membre de droite de (4.34) est de taille $\Theta(\sqrt{\mu_k})$. Puisque la matrice coefficient de (4.34) a un inverse uniformément borné, on en déduit que $\Delta x = \Theta(\sqrt{\mu_k})$ et $\Delta y_S = \Theta(\sqrt{\mu_k})$. Nous montrons maintenant que la borne sur Δx peut être resserrée à l'aide du lemme 4.3.1. Par identification des blocs de la matrice M du lemme 4.3.1 avec ceux de la matrice K_k dans (4.34) et en faisant appel à la LICQ et au lemme 4.2.2 on a

$$A = O(1), \quad B = \Theta(1), \quad D = \Theta(\mu),$$

si bien que $S = \Theta(\mu_k^{-1})$. En multipliant K_k^{-1} par le membre de droite de (4.34) on a $\Delta x = \Theta(\mu_k)\Theta(\sqrt{\mu_k}) + \Theta(1)\Theta(\mu_k) = \Theta(\mu_k)$ comme annoncé.

En substituant cette estimation de Δx dans (4.35), on obtient

$$\begin{aligned} \Delta y_W &= (y_W^{\text{P},k} - y_W^{k+}) - Y_W^{k+} C_W(x^k)^{-1} J_W(x^k) \Delta x \\ &= \Theta(\mu_k^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sigma}) + \Theta(\mu_k^{\frac{1}{2}\sigma}) \Theta(\mu_k) \\ &= \Theta(\mu_k^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sigma}), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le corollaire 4.1.14 (4.23), (4.24) et le lemme 4.2.2. De même on a

$$\begin{aligned} \Delta y_I &= (y_I^{\text{P},k} - y_I) - Y_I C_I(x^k)^{-1} J_I(x^k) \Delta x \\ &= \Theta(\mu_k) + \Theta(\mu_k) \\ &= \Theta(\mu_k), \end{aligned}$$

ce qui complète la preuve. \square

Nous sommes maintenant prêts à montrer qu'une longueur de pas unité dans la direction Δw à partir de l'itéré mis à jour w^+ conduit à un nouvel itéré strictement réalisable $w^{k+1} = w^k + \Delta w$. La direction de recherche Δw satisfait (4.34). En particulier, l'identité suivante nous sera utile

$$c_i(x^k) + \nabla c_i(x^k)^T \Delta x = (\mu_{k+1} - c_i(x^k) \Delta y_i) / y_i^{k+}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4.36)$$

Le prix à payer pour obtenir cette propriété essentielle est que σ doit être plus petit que $\frac{1}{2}$. Cela limite effectivement l'ordre de convergence, comme on le verra plus tard. Malgré cette limitation, on atteint toujours une convergence superlinéaire.

Lemme 4.3.3 *Supposons que w^k satisfait (4.17) avec $\epsilon_k = O(\mu_k)$ et que y^{k+} est défini par (4.24) avec $\sigma \in (0, \frac{1}{2})$. Supposons aussi que μ_k est mis à jour selon la règle (4.23) et que $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Soit Δw le pas de Newton calculé selon (4.34)–(4.35). Alors le nouvel itéré $w^{k+1} := w^k + \Delta w$ est strictement réalisable pour (4.1), c'est-à-dire que $c(x^{k+1}) > 0$ et $y^{k+1} > 0$.*

Preuve. Considérons le cas où $i \in \mathcal{A}_*^S$. Le corollaire 4.1.14 et le lemme 4.3.2 conduisent à $y_i^{k+} = y_i^k = \Theta(1)$ et $\Delta y_i = \Theta(\sqrt{\mu_k})$. Donc $y_i^{k+1} = \Theta(1) + \Theta(\sqrt{\mu_k}) > 0$ pour tout k assez grand. En vertu de (4.36) et d'un développement de Taylor, on obtient

$$\begin{aligned} c_i(x^{k+1}) &= c_i(x^k) + \nabla c_i(x^k) \Delta x + O(\|\Delta x\|^2) \\ &= (\mu_{k+1} - c_i(x^k) \Delta y_i) / y_i^{k+} + O(\|\Delta x\|^2) \\ &= (\mu_k^{\sigma+1} + \Theta(\mu_k^{\frac{3}{2}})) / y_i^{k+} + O(\mu_k^2), \\ &> 0, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé (4.36) et l'hypothèse $\sigma \in (0, \frac{1}{2})$.

Soit maintenant $i \in \mathcal{I}_*$. De la définition de Δw , du corollaire 4.1.14 et du lemme 4.3.2 on a

$$\begin{aligned} y_i^{k+1} &= y_i^k + \Delta y_{\mathcal{I}} \\ &= y_{\mathcal{I}}^{P,k} - Y_{\mathcal{I}}^k C_{\mathcal{I}}(x^k)^{-1} J_{\mathcal{I}}(x^k) \Delta x \\ &= \Theta(\mu_k^{1+\sigma}) + O(\mu_k^2) > 0. \end{aligned}$$

Tout comme précédemment, en utilisant le même développement de Taylor, on déduit que $c_i(x^{k+1}) = \Theta(1) + O(\mu_k) > 0$.

Enfin si $i \in \mathcal{A}_*^W$, on a $y_i^{k+} = \Theta(\mu_k^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sigma})$. On peut réarranger (4.36) comme suit

$$\begin{aligned} y_i^{k+1} &= (\mu_{k+1} - y_i^{k+} \nabla c_i(x^k)^T \Delta x) / c_i(x^k) \\ &= (\mu_k^{\sigma+1} + \Theta(\mu_k^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sigma}) \Theta(\mu_k)) / c_i(x^k) \\ &= (\mu_k^{\sigma+1} + \Theta(\mu_k^{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sigma})) / c_i(x^k) > 0 \end{aligned}$$

en vertu du fait que $\sigma \in (0, 1)$, soit encore $1 + \sigma < \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sigma$. Finalement $c_i(x^{k+1}) = \Theta(\sqrt{\mu_k}) +$

$\Theta(\mu_k) > 0$ pour tout k suffisamment grand. \square

Notre prochain résultat établit que le nouvel itéré w^{k+1} satisfait les critères d'arrêt des itérations internes (4.17) avec μ_{k+1} . Une tentative naive en utilisant un développement de Taylor du premier ordre et la définition de Δw

$$F(w^{k+1}; \mu_{k+1}) = F(w^{k+}; \mu_{k+1}) + \nabla F(w^{k+}; \mu_{k+1})\Delta w + O(\Delta w)^2 = O(\Delta w)^2$$

n'est pas concluante car selon le lemme 4.3.2 $\Delta w = O(\sqrt{\mu_k})$. On a seulement dans ce cas $F(w^{k+}; \mu_{k+1}) = O(\mu_k)$. Une analyse plus fine est donc requise.

Lemme 4.3.4 *Supposons que w^k vérifie (4.17) avec $\epsilon_k = O(\mu_k)$, y^{k+} est défini comme dans (4.24) et que \mathcal{S} est non vide. Si μ_k est mis à jour par la règle (4.23) avec $\sigma \in (0, \frac{1}{2})$ et si Δw est calculé selon (4.34)–(4.35) alors $w^{k+1} := w^{k+} + \Delta w$ satisfait (4.17) avec μ_{k+1} , c'est-à-dire*

$$\|\nabla_x \mathcal{L}(w^{k+1})\| \leq \epsilon_{k+1}, \quad (4.37a)$$

$$\kappa_L \mu_{k+1} \leq c_i(x^k) y_i^k \leq \kappa_U \mu_{k+1}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.37b)$$

$$(c(x^{k+1}), y^{k+1}) > 0. \quad (4.37c)$$

Preuve. La condition de positivité (4.37c) a déjà été établie par le lemme 4.3.3. Pour montrer la condition (4.37a), notons que le premier bloc de (4.33) peut s'écrire

$$(\nabla f(x^k) + \nabla^2 f(x^k) \Delta x) - \sum_{i=1}^m y_i^{k+} (\nabla c_i(x^k) + \nabla^2 c_i(x^k) \Delta x) - J(x^k)^T \Delta y = 0.$$

Notre intérêt porte sur la quantité

$$\nabla_x \mathcal{L}(w^{k+1}) = \nabla f(x^{k+1}) - \sum_{i=1}^m y_i^{k+1} \nabla c_i(x^{k+1}).$$

Par un développement de Taylor d'ordre un, on a

$$\nabla f(x^{k+1}) = \nabla f(x^k) + \nabla^2 f(x^k) \Delta x + O(\mu_k^2),$$

et pour tout $i = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} y_i^{k+1} \nabla c_i(x^{k+1}) &= (y_i^{k+} + \Delta y_i) [\nabla c_i(x^k) + \nabla^2 c_i(x^k) \Delta x + O(\mu_k^2)] \\ &= y_i^{k+1} [\nabla c_i(x^k) + \nabla^2 c_i(x^k) \Delta x] + O(\mu_k^{\frac{5}{2}}) \\ &= y_i^{k+} [\nabla c_i(x^k) + \nabla^2 c_i(x^k) \Delta x] + \Delta y_i \nabla c_i(x^k) + O(\mu_k^{\frac{3}{2}}), \end{aligned}$$

où nous avons successivement utilisé le corollaire 4.1.14, (4.24), le lemme 4.3.2 et le fait que les plus grands restes sont $y_S^{k+} = \Theta(\sqrt{\mu_k})$ et $\Delta y_S = \Theta(\sqrt{\mu_k})$. En combinant ces diverses relations, on peut alors donner une estimation de la taille du gradient du lagrangien au point w^{k+1}

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathcal{L}(w^{k+1}) &= [\nabla f(x^k) + \nabla^2 f(x^k) \Delta x] \\ &= - \sum_{i=1}^m y_i^{k+} [\nabla c_i(x^k) + \nabla^2 c_i(x^k) \Delta x] - \sum_{i=1}^m \Delta y_i \nabla c_i(x^k) + O(\mu_k^{\frac{3}{2}}) \\ &= \nabla_x \mathcal{L}(w^{k+}) + \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^{k+}) \Delta x - J(x^k)^T \Delta y + O(\mu_k^{\frac{3}{2}}), \end{aligned}$$

où nous utilisons le fait que le terme d'erreur dominant provient de $\Delta y = \Theta(\sqrt{\mu})$. En utilisant (4.33) il reste $\nabla_x \mathcal{L}(w^{k+1}) = O(\mu_k^{\frac{3}{2}})$, lequel avec l'hypothèse $\sigma \in (0, \frac{1}{2})$ et (4.23) est d'ordre $o(\mu_{k+1})$. Par conséquent (4.37a) est nécessairement vérifiée pour k suffisamment grand.

Nous procédons de la même manière pour prouver (4.37b). A cette fin, nous faisons encore appel à (4.36). Notons d'abord que pour tout $i = 1, 2, \dots, m$, on a

$$\begin{aligned} c_i(x^{k+1}) y_i^{k+1} &= [\nabla c_i(x^k) + \nabla^2 c_i(x^k) \Delta x + O(\mu_k^2)] (y_i^{k+} + \Delta y_i) \\ &= \mu_{k+1} + y_i^{k+} O(\mu_k^2) + \Delta y_i [\nabla^2 c_i(x^k) \Delta x + O(\mu_k^2)]. \end{aligned}$$

La condition de centralité pour le nouvel itéré s'écrit alors

$$c_i(x^{k+1}) y_i^{k+1} - \mu_{k+1} = y_i^{k+} O(\mu_k^2) + \Delta y_i [\nabla^2 c_i(x^k) \Delta x + O(\mu_k^2)].$$

D'après le lemme 4.3.2, on sait que $\Delta x = O(\mu_k)$ et les plus grandes contributions des variables duales proviennent de y_S^k et Δy_S qui sont tous d'ordre $O(\sqrt{\mu_k})$. D'où

$$c_i(x^{k+1}) y_i^{k+1} - \mu_{k+1} = O(\mu_k^{\frac{3}{2}}) = o(\mu_{k+1}),$$

pour les mêmes raisons que ci-dessus. On conclut donc qu' asymptotiquement un seul pas de Newton est suffisant pour satisfaire les critères d'arrêt de l'itération interne pour μ_{k+1} . \square

Nous terminons cette section avec notre principal résultat qui rassemble tous les résultats

précédents et établit la convergence superlinéaire de la suite d'itérés primaux-duaux.

Théorème 4.3.5 *Supposons que la suite $\{w_k\}$ satisfait (4.17) avec $\epsilon_k = O(\mu_k)$, que y^{k+} est défini comme dans (4.24) et que $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Si μ_k est mis à jour par la règle (4.23) avec $\sigma \in (0, \frac{1}{2})$ et si Δw est calculé selon (4.34)–(4.35), alors $w^{k+1} := w^{k+} + \Delta w$ vérifie (4.17) avec μ_{k+1} . De plus la suite $\{w_k\}$ converge superlinéairement vers w^* avec un taux sous- $\frac{3}{2}$, c'est à dire*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|w^{k+1} - w^*\|}{\|w^k - w^*\|^\tau} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|w^{k+1} - w^*\|}{\|w^{k+} - w^*\|^\tau} = 0,$$

pour tout $\tau \in (1, 1 + \sigma)$.

Preuve. Il ne reste que la dernière propriété à établir. Mais en vertu du lemme 4.2.1, on a

$$\frac{\|w^{k+1} - w^*\|}{\|w^k - w^*\|^\tau} = \Theta(\mu_k^{\frac{1}{2}(1+\sigma-\tau)}) = o(1),$$

la dernière égalité découlant de l'hypothèse sur τ . \square

4.4 Illustration numérique

Dans cette section, nous rapportons des résultats numériques préliminaires sur des exemples simples à des fins d'illustration. Des résultats sur un plus large ensemble de problèmes avec des contraintes faiblement actives apparaissent au chapitre 5.

Nous avons utilisé les valeurs suivantes pour les paramètres du problème

$$\beta = 0.25, \quad \sigma = 0.49.$$

Ci-dessous, la sortie d'IPOPT2 sur le problème

$$\underset{x \in \mathbb{R}^{1000}}{\text{minimiser}} \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{1000} (x_i - i)^2 \quad \text{sujet à} \quad x_i - i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 1000, \quad (4.38)$$

dont la solution optimale est $(0, 0, \dots, 0)$ où toutes les contraintes sont faiblement actives.

ITER	ERR	MU	C	D	ALFA(X)	#LS	F	Regu
0	.100D+01d	.100D+00	.316D+00	.000D+00	.000D+00	0	0.79409339D-22	.000D+00
0	.100D+01d	.200D-01	.316D+00	.000D+00	.000D+00	0	-.14220889D-19	.000D+00
1	.191D-01c	.200D-01	.110D-15	.113D+01	.100D+01f	1	0.44113263D+00	.000D+00

2	.120D-02c	.294D-02	.000D+00	.155D+01	.100D+01f	1	0.20712039D+01	.000D+00
3	.953D-03c	.169D-03	.000D+00	.138D+01	.100D+01f	1	0.56093810D+00	.000D+00
4	.279D-03c	.240D-05	.000D+00	.747D+00	.100D+01f	1	0.14083476D+00	.000D+00
5	.692D-04c	.240D-05	.000D+00	.372D+00	.100D+01f	1	0.35810781D-01	.000D+00
6	.167D-04c	.240D-05	.000D+00	.183D+00	.100D+01f	1	0.95622835D-02	.000D+00
7	.478D-05c	.423D-08	.000D+00	.978D-01	.100D+01f	1	0.23916224D-02	.000D+00
8	.119D-05c	.423D-08	.000D+00	.489D-01	.100D+01f	1	0.59896011D-03	.000D+00
9	.297D-06c	.423D-08	.000D+00	.244D-01	.100D+01f	1	0.15079729D-03	.000D+00
10	.733D-07c	.423D-08	.000D+00	.121D-01	.100D+01f	1	0.38762795D-04	.000D+00
11	.173D-07c	.423D-08	.000D+00	.589D-02	.100D+01f	1	0.10775896D-04	.000D+00
12	.516D-08c	.455D-09	.000D+00	.321D-02	.100D+01f	1	0.28086173D-05	.000D+00

On observe dans ce tableau à la colonne 3 qui donne la valeur du paramètre μ qu'IPOPT effectue plusieurs itérations internes à partir de l'itération 4. Et la norme de l'erreur résiduelle du l'approximation du système primal-dual de la colonne 2 décrit un comportement non superlinéaire. Avec la mise à jour des variables duales par (4.24), la nouvelle sortie de IPOPT est décrite dans le tableau ci-dessous

ITER	ERR	MU	C	D	ALFA(X)	#LS	F	Regu
0	.100D+01d	.100D+00	.316D+00	.000D+00	.000D+00	0	0.79409339D-22	.000D+00
0	.100D+01d	.200D-01	.316D+00	.000D+00	.000D+00	0	-.14220889D-19	.000D+00
1	.191D-01c	.200D-01	.110D-15	.113D+01	.100D+01f	1	0.44113263D+00	.000D+00
2	.343D-02c	.294D-02	.439D-15	.224D+01	.100D+01f	1	0.31845692D+01	.000D+00
3	.125D-03c	.169D-03	.000D+00	.280D+01	.100D+01f	1	0.14694891D+00	.000D+00
4	.140D-05c	.240D-05	.000D+00	.679D+00	.100D+01f	1	0.19000940D-02	.000D+00
5	.227D-08c	.423D-08	.000D+00	.836D-01	.100D+01f	1	0.32502084D-05	.000D+00

où on observe maintenant la convergence superlinéaire à travers la norme de l'erreur résiduelle de la colonne 2 qui tend vers zéro Q-superlinéairement.

Considérons à présent le problème

$$\underset{x \in \mathbb{R}^8}{\text{minimiser}} \quad x_1 + 2x_5 - x_8 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 x_i^2, \quad (4.39a)$$

$$\text{sujet à} \quad x_1 - 2.5 \geq 0 \quad : y_1, \quad (4.39b)$$

$$0 \leq x_2 \leq 4.1 \quad : (y_2, y_3), \quad (4.39c)$$

$$x_3, x_4 \geq 0 \quad : (y_4, y_5), \quad (4.39d)$$

$$0.5 \leq x_5 \leq 4 \quad : (y_6, y_7), \quad (4.39e)$$

$$x_6, x_7 \geq 0 \quad : (y_8, y_9), \quad (4.39f)$$

$$0 \leq x_8 \leq 4.3 \quad : (y_{10}, y_{11}), \quad (4.39g)$$

de la collection (Bongartz *et al.*, 1995; Gould *et al.*, 2003). La solution optimale de (4.39) est $x^* = (2.5, 0, 0, 0, 0.5, 0, 0, 1)$. La contrainte (4.39b), les bornes inférieures des contraintes (5.33c) et (4.39e) ainsi que les contraintes (4.39d) et (4.39f) sont actives au point x^* . Les multiplicateurs de Lagrange correspondants sont $y_1^* = 3.5, y_2^* = 0, y_4^* = 0, y_5^* = 0, y_6^* = 2.5, y_8^* = 0 = x_6^*$ et $y_9^* = 0$. Donc la borne inférieure de (4.39c) et les contraintes (4.39d) – (4.39f) sont faiblement actives au point x^* qui vérifie la LICQ. À présent le tableau ci-dessous donne la sortie d'IPOPT2 pour le problème (4.39)

ITER	ERR	MU	C	D	ALFA(X)	#LS	F	Regu
0	.370D+01c	.100D+00	.203D+01	.000D+00	.000D+00	0	0.20000000D+01	.000D+00
1	.797D+00c	.100D+00	.000D+00	.208D+01	.100D+01h	1	0.70344611D+01	.000D+00
2	.813D-01c	.200D-01	.000D+00	.650D+00	.100D+01f	1	0.64128126D+01	.000D+00
3	.141D-01c	.294D-02	.000D+00	.367D+00	.100D+01f	1	0.62983432D+01	.000D+00
4	.417D-02c	.169D-03	.000D+00	.204D+00	.100D+01f	1	0.62611810D+01	.000D+00
5	.100D-02c	.169D-03	.000D+00	.100D+00	.100D+01f	1	0.62532631D+01	.000D+00
6	.291D-03c	.240D-05	.000D+00	.540D-01	.100D+01f	1	0.62507391D+01	.000D+00
7	.723D-04c	.240D-05	.000D+00	.269D-01	.100D+01f	1	0.62501913D+01	.000D+00
8	.175D-04c	.240D-05	.000D+00	.132D-01	.100D+01f	1	0.62500544D+01	.000D+00
9	.497D-05c	.423D-08	.000D+00	.705D-02	.100D+01f	1	0.62500123D+01	.000D+00
10	.124D-05c	.423D-08	.000D+00	.352D-02	.100D+01f	1	0.62500030D+01	.000D+00
11	.309D-06c	.423D-08	.000D+00	.176D-02	.100D+01f	1	0.62500007D+01	.000D+00
12	.763D-07c	.423D-08	.000D+00	.873D-03	.100D+01f	1	0.62500001D+01	.000D+00
13	.181D-07c	.423D-08	.000D+00	.425D-03	.100D+01f	1	0.62500000D+01	.000D+00
14	.535D-08c	.455D-09	.000D+00	.231D-03	.100D+01f	1	0.62499999D+01	.000D+00

où on observe une fois de plus la convergence non superlinéaire. Avec la mise à l'échelle des multiplicateurs faiblement actifs IPOPT résout à présent (4.39) selon le tableau suivant

ITER	ERR	MU	C	D	ALFA(X)	#LS	F	Regu
0	.370D+01c	.100D+00	.203D+01	.000D+00	.000D+00	0	0.20000000D+01	.000D+00
1	.797D+00c	.100D+00	.000D+00	.208D+01	.100D+01h	1	0.70344611D+01	.000D+00
2	.939D-01c	.200D-01	.000D+00	.824D+00	.100D+01f	1	0.63401135D+01	.000D+00
3	.836D-03c	.294D-02	.000D+00	.369D+00	.100D+01f	1	0.62652637D+01	.000D+00
4	.308D-04c	.169D-03	.000D+00	.149D+00	.100D+01f	1	0.62508376D+01	.000D+00
5	.414D-06c	.240D-05	.000D+00	.394D-01	.100D+01f	1	0.62500115D+01	.000D+00
6	.765D-09c	.423D-08	.000D+00	.501D-02	.100D+01f	1	0.62499999D+01	.000D+00

Et là aussi, on observe la convergence superlinéaire de la norme de l'erreur résiduelle primale-duale de la colonne 2. À travers ces deux exemples, on voit que notre approche de mise à jour est effective. Nous avons choisi le problème (4.38) car il ne contient que des contraintes faiblement actives et (4.39) qui contient des contraintes faiblement actives et des contraintes fortement actives.

4.5 Discussion

Dans cette étude, nous avons conduit l'entièreté de notre analyse en vertu de la condition de qualification forte qu'est la LICQ. La question de savoir si ces résultats restent valides avec une contrainte de qualification plus faible, telle que la MFCQ stricte (Kyparisis, 1985) ou la MFCQ, reste ouverte.

Une analyse spectrale de (4.14) plus approfondie que dans le lemme 4.1.11 pourrait en révéler davantage sur le comportement des itérés en l'absence de la complémentarité stricte. À cet égard, il est intéressant de noter que nous pouvons nous limiter à un système avec des valeurs propres réelles. En effet, en réécrivant la fonction primale-duale (4.12) sous la forme

$$F(w; \mu) := \begin{bmatrix} \nabla_x L(w) \\ \mu e - C(x)y \end{bmatrix},$$

on obtient

$$\nabla F(w; \mu) = \begin{bmatrix} \nabla_{xx} L(w) & -J(x)^T \\ -YJ(x) & -C(x) \end{bmatrix}.$$

Considérons alors la matrice diagonale par blocs non singulière $D = \text{blkdiag}(I, -Y^{\frac{1}{2}})$, on a la transformation de similarité suivante

$$D^{-1} \nabla F(w; \mu) D = \begin{bmatrix} \nabla_{xx} L(w) & J(x)^T Y^{\frac{1}{2}} \\ Y^{\frac{1}{2}} J(x)^T & -C(x) \end{bmatrix}.$$

Puisque cette dernière matrice est symétrique, on conclut que $\nabla F(w; \mu)$ a des valeurs propres réelles.

CHAPITRE 5

UNE COLLECTION DE PROBLÈMES NON STRICTEMENT COMPLÉMENTAIRES : TESTS NUMÉRIQUES COMPARATIFS ENTRE IPOPT, KNITRO ET LOQO

5.1 Introduction

Soit le problème d'optimisation non linéaire général, non convexe

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimiser}} \quad f(x) \quad \text{sujet à} \quad h(x) = 0, \quad c(x) \geq 0, \quad (5.1)$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont des fonctions deux fois continûment différentiables.

Si la complémentarité stricte n'est pas satisfaite à une solution locale x , nous n'avons pas connaissance d'un résultat qui garantisse l'existence d'une trajectoire centrale autour de x pour le problème non linéaire général (5.1). En dépit de cette observation, les méthodes de points intérieurs ont été utilisées pour résoudre des problèmes avec des contraintes faiblement actives avec plus ou moins de succès. Cependant même en cas de succès, aucune convergence locale rapide n'est garantie à cause du lien qui existe entre la condition de complémentarité stricte et la régularité des sous problèmes utilisés pour calculer la direction de déplacement.

Pour ces raisons, une collection de problèmes non strictement complémentaires est utile pour tester l'efficacité de divers algorithmes de points intérieurs classiques ainsi que d'autres types de méthodes sur ce type de problèmes. À notre connaissance, parmi les collections existantes, aucune n'est spécifiquement dédiée aux problèmes faiblement actifs. Dans ce chapitre, nous rassemblons des problèmes faiblement actifs à partir des collections déjà existantes et de la littérature. Pour la plupart de ces problèmes, un point stationnaire, les multiplicateurs de Lagrange associés ainsi que la condition de qualification satisfaite sont donnés. On subdivise les problèmes en deux groupes : les problèmes réguliers qui satisfont la LICQ et les problèmes non réguliers qui ne satisfont pas la LICQ.

Les algorithmes de points intérieurs usuels (IPMs) ont un taux de convergence locale au mieux linéaire sur les problèmes non strictement complémentaires. Par la technique de mise à l'échelle des multiplicateurs non strictement complémentaires exposée au chapitre 4, nous récupérons la convergence superlinéaire pour les IPM. Cette mise à l'échelle a été incorporée à la version Fortran de IPOPT, un solveur à source libre pour les problèmes d'optimisation

non linéaires de grande taille et qui utilise un algorithme de points intérieurs et une recherche linéaire avec une méthode de filtre (Wächter et Biegler, 2006; Wächter, 2009).

Nous comparons l'approche de mise à l'échelle duale avec la version standard de IPOPT et avec deux autres solveurs de points intérieurs que sont KNITRO (Waltz et Plantenga, 2006) et LOQO (Vanderbei, 2008). Par souci d'exhaustivité, nous incluons les résultats de SNOPT (Gill *et al.*, 2005, 2008), le solveur utilisé pour détecter les contraintes non strictement complémentaires. SNOPT minimise de manière itérative une approximation quadratique d'une version modifiée du lagrangien de (5.1)

$$\mathcal{L}(x, x_k, y_k) := f(x) - y_k^T (c(x) - c_L(x, x_k)),$$

avec

$$c_L(x, x_k) := c(x_k) + J(x_k)(x - x_k),$$

sous les contraintes correspondant à la linéarisation des contraintes non linéaires $c_L(x, x_k) \geq 0$ où $J(x) = \nabla c(x)^T$ est la matrice jacobienne des contraintes de (5.1). Une méthode de contrainte active est utilisée pour résoudre ce problème. Nous avons inclus SNOPT dans nos tests car il identifie plus précisément les contraintes faiblement actives que IPOPT, KNITRO et LOQO. Nous utilisons la variante Interior/Direct de KNITRO qui calcule un nouvel itéré en résolvant directement le système de KKT primal-dual. Tout comme KNITRO (Waltz et Plantenga, 2006) et LOQO (Vanderbei, 2008) IPOPT utilise un algorithme de points intérieurs primal-dual pour résoudre un problème non linéaire. Globalement IPOPT convertit (5.1) en un problème sous forme standard

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimiser}} f(x) \quad \text{sujet à} \quad \tilde{h}(x) = 0, \quad x \geq 0,$$

en ajoutant autant de variables d'écart que nécessaire.

À chaque itération toute méthode de points intérieurs primale-duale résout, de manière approchée, un système linéaire de la forme

$$\begin{bmatrix} H(x, y) + \delta_w I & \nabla h(x) & -I \\ \nabla h(x)^T & -\delta_c I & 0 \\ X & 0 & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f(x) - \nabla h(x)y - z \\ h(x) \\ Xz - \mu e \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

où $X = \text{diag}(x)$, $Z = \text{diag}(z)$, $H(x, y) = \nabla^2 f(x) - \sum_{i=1}^m y_i \nabla^2 \tilde{h}_i(x)$ est la matrice hessienne du lagrangien du problème sous la forme standard pour des paramètres $(\delta_c, \delta_w) \geq 0$. Les dangers liés au manque de la complémentarité stricte sont visibles dans (5.2) car les lignes du troisième bloc qui correspondent aux contraintes faiblement actives tendent vers zéro. Il

en résulte que le système (5.2) est asymptotiquement très mal conditionné pour une solution faiblement active. Une difficulté supplémentaire est qu'en l'absence de la complémentarité stricte, la direction d'approche de la solution par les minima locaux des sous-problèmes barrière est tangente à certaines contraintes actives (Wright et Orban, 2002), amenuisant ainsi tout espoir de convergence locale rapide.

Dans le chapitre 4 nous avons proposé une approche de mise à l'échelle des variables duales faiblement actives afin de récupérer une convergence locale superlinéaire. L'idée principale de cette approche est de mettre à l'échelle les multiplicateurs de Lagrange correspondant à des contraintes faiblement actives selon la règle

$$y_i^{k+} = \begin{cases} y_i^k \sqrt{\frac{\mu_{k+1}}{\mu_k}} & \text{si } \max\{c_i(x^k), y_i^k\} \leq \mu_k^{\frac{1}{2}-\beta}, \\ y_i^k & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.3)$$

où $\beta \in]0, \frac{1}{2}[$ est une constante positive, μ_k est la valeur du paramètre barrière à la fin de l'itération k et μ_{k+1} , la valeur mise à jour de ce même paramètre au début de l'itération $k + 1$. Nous partons ainsi d'un meilleur point initial, à partir duquel un pas de Newton est suffisant pour passer à la région des points satisfaisant au critère d'arrêt pour μ_{k+1} . Cela engendre en fin de compte une convergence locale superlinéaire des itérés primaux et duaux. Dans nos tests, nous désignons par IPOPT2nsc, la version de IPOPT standard où nous avons incorporé la règle de mise à l'échelle (5.3).

Le reste du chapitre 5 est structuré comme suit : nous décrivons le processus de détection numérique des contraintes faiblement actives dans la section 5.2. La section 5.3 recense les problèmes faiblement actifs réguliers et leurs caractéristiques ainsi que les problèmes faiblement actifs irréguliers. La section 5.4 resume les résultats numériques des solveurs sur la collection de problèmes faiblement actifs alors que la section 5.5 renferme les comparaisons des tests numériques entre les différents solveurs sur d'autres problèmes faiblement actifs de la collection CUTE(r). Enfin la section 5.6 ferme le chapitre par une conclusion.

5.2 Détection numérique des contraintes faiblement actives

Déterminer analytiquement si un problème possède des contraintes faiblement actives peut devenir rapidement fastidieux et source d'erreur quand le nombre de contraintes et de variables sont très grands. Pour cette raison, certains problèmes de la présente collection ont été jugés faiblement actifs en vertu des résultats numériques obtenus par un solveur.

Nous jugeons une contrainte d'inégalité $c_i(x) \geq 0$ auquel est associé le multiplicateur de

Lagrange $y_i \geq 0$ numériquement active à une solution locale x^* si

$$|c_i(x^*)| \leq \varepsilon(1 + |c_i(x^*)|)$$

et faiblement active si en plus

$$|y_i^*| \leq \varepsilon(1 + |c_i(x^*)|),$$

où $\varepsilon > 0$ est un seuil d'erreur.

L'identification numérique de solutions admettant au moins une contrainte faiblement active par une méthode de points intérieurs manque notoirement de précision. Une explication est que les itérés doivent satisfaire à la condition de complémentarité perturbée suivante $|c_i^k y_i^k - \mu_k| = O(\mu_k)$. Avec $\mu_k \rightarrow 0$, il peut être prouvé que si la MFCQ et une condition d'optimalité du second ordre sont satisfaites par x alors $c_i(x^k) \approx \sqrt{\mu_k}$ et $y_i^k \approx \sqrt{\mu_k}$ satisfont la complémentarité perturbée si la contrainte i est faiblement active. Si la plus petite valeur permise pour μ_k est $\mu_{\min} \approx 10^{-8}$, les méthodes de points intérieurs pourraient finir avec des itérés tels que $c_i(x^k) \approx 10^{-4}$ et $y_i^k \approx 10^{-4}$. Cela impose de choisir le seuil d'erreur ε relativement grand ouvrant ainsi la porte à d'éventuels faux positifs.

Notre détection numérique est basé sur un code écrit sous AMPL (Fourer *et al.*, 2002) et qui utilise un solveur de contraintes actives, en l'occurrence SNOPT. Pour la détection numérique des contraintes faiblement actives, nous avons utilisé les solveurs suivants : SNOPT qui est basé sur un algorithme de programmation quadratique séquentielle (SQP) et de méthode de contraintes actives, KNITRO-Active qui est la version avec une méthode de contraintes actives de KNITRO et FILTER (Fletcher et Leyffer, 1998) qui utilise un algorithme SQP. Le fait que les méthodes de contraintes actives résolvent la condition de complémentarité par une technique combinatoire améliore l'identification des multiplicateurs nuls.

Nous utilisons pour la détection numérique des contraintes faiblement actives, le script AMPL du listing 5.1 où nous avons choisi le seuil d'erreur d'identification $\varepsilon := 10^{-5}$.

5.2.1 Sensibilité de la détection numérique

Dans cette section nous illustrons la sensibilité du processus de détection numérique. Pour des problèmes admettant plusieurs solutions locales, deux solveurs différents peuvent ne pas identifier le même point stationnaires. Pour certains de ces problèmes, une analyse théorique permet de déterminer la nature réelle des contraintes. Cependant en général, la détection numérique reste le seul recours pour décider si une contrainte donnée est faiblement active en une solution donnée.

Le tableau 5.1 resume le résultat des détections numériques par les solveurs FILTER, KNITRO-Active et SNOPT sur les problèmes **s270**, **s278**, **s376**, **s392**, **hs108** et **hs116** des

```

1 option solver SNOPT;
2 param tol;          # tolerance
3 let tol := 1.0e-5;
4 param nsc;          # Number of non-sc constraints
5 let nsc := 0;
6
7 solve;
8
9 printf '\n\nWeakly-active bound constraints:\n';
10 printf "  %-20s  %11s  %11s\n", 'Name', 'Slack', 'Multiplier';
11
12 for {i in 1.._nvars}{
13
14     # See if lower bound is (nearly) active
15     if abs(_var[i].lslack) <= tol * (1 + abs(_var[i].val)) then {
16         if abs(_var[i].lrc) <= tol * (1 + abs(_var[i].val)) then {
17             let nsc := nsc + 1;
18             printf "LB %-20s  %11.4e  %11.4e \n",
19                 _varname[i], _var[i].lslack, _var[i].lrc;
20         }
21     }
22     # See if upper bound is (nearly) active
23     if abs(_var[i].uslack) <= tol * (1 + abs(_var[i].val)) then {
24         if abs(_var[i].urc) <= tol * (1 + abs(_var[i].val)) then {
25             let nsc := nsc + 1;
26             printf "UB %-20s  %11.4e  %11.4e \n",
27                 _varname[i], _var[i].uslack, _var[i].urc;
28         }
29     }
30 }
31 printf '\n\nWeakly-active inequality constraints:\n';
32 printf "  %-20s  %11s  %11s\n", 'Name', 'Slack', 'Multiplier';
33
34 # Only check inequality constraints
35 for {i in 1.._ncons: _con[i].lb < _con[i].ub}{
36     # See if lower bound is (nearly) active
37     if abs(_con[i].lslack) <= tol * (1 + abs(_con[i].body)) then {
38         # See if lower bound is weakly active
39         if abs(_con[i].ldual) <= tol * (1 + abs(_con[i].body)) then {
40             let nsc := nsc + 1;
41             printf "L  %-20s  %11.4e  %11.4e \n",
42                 _conname[i], _con[i].lslack, _con[i].ldual;
43         }
44     }
45     # See if upper bound is (nearly) active
46     else if abs(_con[i].uslack) <= tol * (1 + abs(_con[i].body)) then {
47         # See if upper bound is weakly active
48         if abs(_con[i].udual) <= tol * (1 + abs(_con[i].body)) then {
49             let nsc := nsc + 1;
50             printf "U  %-20s  %11.4e  %11.4e \n",
51                 _conname[i], _con[i].uslack, _con[i].udual;
52         }
53     }
54 }
55 printf "\nNumber of constraints violating strict complementarity:
56 %d\n", nsc;
57 printf "\n Epsilon = %11.4e\n", tol;

```

Listing 5.1 Script AMPL pour la détection des contraintes faiblement actives

collections de Schittkowski (1987) et Hock et Schittkowski (1981), pour des valeurs du seuil ϵ variant de 10^{-4} à 10^{-9} . Dans chaque cellule de ce tableau, on trouve le nombre de contraintes faiblement actives détectées par chaque solveur pour le problème concerné et pour la valeur du seuil d'erreur ϵ correspondante. Pour les problèmes **s376** et **s392** le nombre de contraintes actives détectées demeure stable pour tous les solveurs et ne dépend pas de la valeur du seuil. On peut donc raisonnablement penser que ces problèmes possèdent réellement des contraintes faiblement actives. Pour les autres problèmes où le nombre de contraintes faiblement actives détectées semblent sensibles au choix du solveur de même qu'à la valeur du seuil, des investigations plus poussées sont nécessaires avant de pouvoir conclure. Le choix de ces problèmes répond au fait que le nombre de contraintes faiblement actives fluctue considérablement d'un solveur à l'autre.

Tableau 5.1 Détection numérique de la complémentarité stricte avec FILTER, KNITRO-Active et SNOPT

		Problèmes					
		s270	s278	s376	s392	hs108	hs116
$\epsilon = 10^{-4}$	FILTER	0	0	1	8	0	2
	KNITRO-Active	4	0	1	8	0	2
	SNOPT	5	2	1	8	3	3
$\epsilon = 10^{-5}$	FILTER	0	0	1	8	0	1
	KNITRO-Active	4	0	1	8	0	1
	SNOPT	5	2	1	8	3	2
$\epsilon = 10^{-6}$	FILTER	0	0	1	8	0	1
	KNITRO-Active	4	0	1	8	0	1
	SNOPT	5	2	1	8	3	2
$\epsilon = 10^{-6}$	FILTER	0	0	1	8	0	1
	KNITRO-Active	4	0	1	8	0	1
	SNOPT	5	0	1	8	2	2
$\epsilon = 10^{-7}$	FILTER	0	0	1	8	0	1
	KNITRO-Active	4	0	1	8	0	1
	SNOPT	5	0	1	8	2	2
$\epsilon = 10^{-8}$	FILTER	0	0	1	8	0	1
	KNITRO-Active	4	0	1	8	0	1
	SNOPT	4	0	1	8	2	2
$\epsilon = 10^{-9}$	FILTER	0	0	1	8	0	1
	KNITRO-Active	4	0	1	8	0	1
	SNOPT	1	0	1	8	2	1

5.3 La collection de problèmes faiblement actifs

Dans cette section, on trouve la description des problèmes qui composent la collection. Pour chaque problème on utilise la notation

$$\ell \leq c(x) \leq u \quad : (y_1, y_2),$$

qui signifie que y_1 et y_2 sont les vecteurs de multiplicateurs de Lagrange de taille appropriée correspondant aux bornes inférieure et supérieure sur la contrainte $c(x)$, respectivement.

Les modèles AMPL de tous les problèmes listés ici sont disponibles en ligne à l'adresse www.gerad.ca/~zocou/nscprob.html.

5.3.1 Problèmes faiblement actifs réguliers

Cette partie regroupe les problèmes ayant des contraintes faiblement actives mais pour lesquels la LICQ est satisfaite à la solution locale. À cause de l'unicité des multiplicateurs de Lagrange correspondants, LICQ oblige, la nature faiblement active des contraintes est intrinsèque au problème et non liée à un quelconque mauvais comportement des algorithmes.

Le problème biggsc4 de la collection Bongartz *et al.* (1995); Gould *et al.* (2003)

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad -x_1x_3 - x_2x_4, \tag{5.4a}$$

$$\text{sujet à} \quad 0 \leq x_1 + x_2 - 2.5 \leq 5 \quad : (y_1, y_2), \tag{5.4b}$$

$$0 \leq x_1 + x_3 - 2.5 \leq 5 \quad : (y_3, y_4), \tag{5.4c}$$

$$0 \leq x_1 + x_4 - 2.5 \leq 5 \quad : (y_5, y_6), \tag{5.4d}$$

$$0 \leq x_2 + x_3 - 2 \leq 5 \quad : (y_7, y_8), \tag{5.4e}$$

$$0 \leq x_2 + x_4 - 2 \leq 5 \quad : (y_9, y_{10}), \tag{5.4f}$$

$$0 \leq x_3 + x_4 - 1.5 \leq 5 \quad : (y_{11}, y_{12}), \tag{5.4g}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 5 \geq 0 \quad : y_{13}, \tag{5.4h}$$

$$0 \leq x_i \leq 5, \quad i = 1, 2, \dots, 4 \quad : (y_{14}, \dots, y_{21}). \tag{5.4i}$$

a pour solution $x^* = (4, 3.5, 3.5, 3)$. Les bornes supérieures des contraintes (5.4b)–(5.4c), (5.4e) et (5.4g) sont actives au point x^* où la LICQ est trivialement vérifiée. Les multiplicateurs correspondants à ces contraintes actives sont $y_2^* = 3, y_4^* = .5, y_8^* = 0$ et $y_{12}^* = x_2^* = 3.5$. Donc la borne supérieure de la contrainte (5.4e) est faiblement active en x^* .

Pour un vecteur $d \in \mathbb{R}^4$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d = 0$ pour tout $i \in \mathcal{A}_*^S$ donne $d_1 + d_2 = 0 = d_1 + d_3 = d_3 + d_4$ et donc $d_1 = -d_2 = -d_3 = d_4$. Et $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$ pour tout $i \in \mathcal{A}_*^W$ implique que $-(d_2 + d_3) = -2d_1 \geq 0$. Donc pour $d = d_1(1, -1, -1, 1)$ avec $d_1 \leq 0$, on a

$$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = d_1^2 [1 \ -1 \ -1 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 4d_1^2 > 0 \text{ si } d_1 \neq 0.$$

Donc la condition suffisante du second ordre est satisfaite au point x^* .

En partant de l'origine $x_0 = 0$, IPOPT, KNITRO et LOQO trouvent tous le même point stationnaire $x^* = (4, 3.5, 3.5, 3)$, alors que SNOPT converge vers le point réalisable $x = (1.5, 1, 1, 1.5)$ mais qui n'est pas un point de KKT. Les bornes inférieures des contraintes (5.4b) et (5.4c) sont faiblement actives en ce nouveau point.

Le problème **hatfldh** de la collection Bongartz *et al.* (1995); Gould *et al.* (2003) est le même que le problème **biggsc4** mais avec un point initial différent, $x_0 = (1, 5, 5, 1)$. En partant de ce point, IPOPT, KNITRO, LOQO et SNOPT obtiennent tous le même point stationnaire $x^* = (4, 3.5, 3.5, 3)$, où comme on l'a vu précédemment, la seule contrainte faiblement active est la borne supérieure de (5.4e).

Le problème fac-33 est l'exemple 3.3 de Kanzow *et al.* (2000, §3.3)

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2, \quad (5.5a)$$

$$\text{sujet à} \quad x_1 \geq 0 \quad : y_1, \quad (5.5b)$$

$$x_2 \geq 0 \quad : y_2, \quad (5.5c)$$

qui a pour solution $x_1^* = 0 = x_2^*$ et les multiplicateurs de Lagrange correspondants $y_1^* = 0 = y_2^*$. Toutes les deux contraintes (5.5b) et (5.5c) sont faiblement actives au point x^* où la LICQ est satisfaite.

Ici $\mathcal{A}_*^S = \emptyset$ et pour $d \in \mathbb{R}^2$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$ pour tout $i \in \mathcal{A}_*^W$ donne $d = (d_1, d_2)$ avec $d_1 \geq 0, d_2 \geq 0$. De plus on a

$$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = [d_1 \ d_2] \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = 2(d_1 + d_2)^2 + 4d_1d_2 > 0 \text{ si } d \neq 0.$$

Donc x^* satisfait la condition suffisante du second ordre pour le problème **fac-33**.

Le problème **fac-42** est l'exemple 4.2 de (Kanzow *et al.*, 2000, §4)

$$\underset{x \in \mathbb{R}^5}{\text{minimiser}} \quad (x_1 - x_2)^2 + (x_3 - 1)^2 + (x_4 - 1)^4 + (x_5 - 1)^6, \quad (5.6a)$$

$$\text{sujet à} \quad x_1^2 x_4 + \sin(x_4 - x_5) - 1 \geq 0 \quad : y_1, \quad (5.6b)$$

$$x_2 + x_3^4 x_4^2 - 2 \geq 0 \quad : y_2, \quad (5.6c)$$

$$1 - x_2 \geq 0 \quad : y_3, \quad (5.6d)$$

dont la solution est $x^* = (1, 1, 1, 1, 1)$ et les multiplicateurs de Lagrange associés sont $y^* = (0, 0, 0)$. Toutes les trois contraintes sont faiblement actives en x^* où la LICQ est vérifiée.

Ici $\mathcal{A}_*^S = \emptyset$. Les gradients des contraintes faiblement actives en x^* et la hessienne du lagrangien en ce point sont

$$\{\nabla c_i(x^*)^T, i \in \mathcal{A}_*^W\} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \nabla_{xx}\mathcal{L}(w^*) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour $d \in \mathbb{R}^5$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$ pour tout $i \in \mathcal{A}_*^W$ donne $2d_1 + 2d_4 + d_5 \geq 0$, $d_2 + 4d_3 + 2d_4 \geq 0$ et $d_1 \leq 0$. En prenant par exemple $d = (0, 0, 0, 0, 1, 1)$ il vient que $d^T \nabla_{xx}\mathcal{L}(w^*)d = 0$ et par conséquent la condition suffisante du second ordre n'est pas satisfaite en x^* .

Le problème **fiacmc-52** (Fiacco et McCormick, 1990, section 5.2),

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad x_2, \quad (5.7a)$$

$$\text{sujet à} \quad -x_1^2 + x_2 \geq 0 \quad : y_1, \quad (5.7b)$$

$$x_1 \geq 0 \quad : y_2. \quad (5.7c)$$

Sa solution est $x^* = (0, 0)$ et les multiplicateurs correspondants sont $y_1^* = 1$, $y_2^* = 0$. Donc la contrainte (5.7c) est faiblement active en x^* où la LICQ est vérifiée. En effet, le gradient de l'unique contrainte active au point x^* est non nul.

Pour **fiacmc-52**, pour un vecteur $d \in \mathbb{R}^2$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d = 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^S$ donne

$d_2 = 0$, et $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^W$ implique que $d_1 \geq 0$. Par suite, pour tout vecteur $d = (d_1, 0)$ avec $d_1 > 0$ on obtient

$$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = [d_1 \ 0] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2d_1^2 > 0 \quad \text{si } d_1 \neq 0.$$

Donc x^* satisfait la condition suffisante du second ordre pour le problème **fiacmc-52**.

Le problème forgw est l'exemple 2.6 de Forsgren et al. (2002)

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad \frac{1}{2}(x_2^2 + x_2^2), \quad (5.8a)$$

$$\text{sujet à} \quad x_1 + x_2 \geq 4 \quad : y_1, \quad (5.8b)$$

$$x_2 \geq 2 \quad : y_2. \quad (5.8c)$$

Sa solution est $x^* = (2, 2)$ et les multiplicateurs de Lagrange correspondants sont $y_1^* = 2$, $y_2^* = 0$. Donc la contrainte (5.8c) est faiblement active en x^* où la LICQ est vérifiée.

Ici, pour $d \in \mathbb{R}^2$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d = 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^S$ donne $d_1 + d_2 = 0$, et $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^W$ implique que $d_2 \geq 0$. Par suite, pour tout vecteur $d = (-d_2, d_2)$ avec $d_2 \geq 0$, on obtient

$$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = [-d_2 \ d_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d_2 \\ d_2 \end{bmatrix} = 2d_2^2 > 0 \quad \text{si } d_2 \neq 0.$$

Donc x^* satisfait la condition suffisante du second ordre pour le problème **forgw**.

Le problème henk est l'exemple 6.2 (Heinkenschloss et al., 1999, Section 6)

C'est un exemple de problèmes avec plusieurs solutions

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) - x_1^2 x_2 + x_1, \quad (5.9a)$$

$$\text{sujet à} \quad x_1 \geq 0 \quad : y_1, \quad (5.9b)$$

$$x_2 \geq 0 \quad : y_2. \quad (5.9c)$$

$x^* = (0, 0)$ est un minimum du problème **henk**, et les multiplicateurs de Lagrange qui lui sont associés sont $y^* = (1, 0)$. Par conséquent la contrainte (5.9c) est faiblement active au point x^* qui vérifie la LICQ.

Pour le problème **henk**, pour $d \in \mathbb{R}^2$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d = 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^S$ entraîne $d_1 = 0$ et $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^W$ implique que $d_2 \geq 0$. Par suite, pour tout vecteur $d = (0, d_2)$ avec $d_2 \geq 0$, on obtient

$$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = [0 \ d_2] \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \end{bmatrix} = 2d_2^2 > 0 \quad \text{si } d_2 \neq 0.$$

Donc x^* satisfait la condition suffisante du second ordre pour le problème **henk**.

Mentionnons que le problème **henk** admet aussi les solutions strictement complémentaires $x^* = (1, 1)$ et $x^* = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1, 2 - \sqrt{3})$.

Le problème hs017 de la collection (Hock et Schittkowski, 1981)

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2, \quad (5.10a)$$

$$\text{sujet à} \quad x_2^2 - x_1 \geq 0 \quad : y_1, \quad (5.10b)$$

$$x_1^2 - x_2 \geq 0 \quad : y_2, \quad (5.10c)$$

$$-\frac{1}{2} \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \quad : (y_3, y_4), \quad (5.10d)$$

$$1 - x_2 \geq 0 \quad : y_5. \quad (5.10e)$$

a pour solution $x^* = (0, 0)$ à laquelle sont associés les multiplicateurs $y^* = (2, 0, 0, 0, 0)$. Donc la contrainte (5.10c) est faiblement active au point x^* . Les gradients des contraintes (5.10b) et (5.10c), actives au point x^* , sont respectivement $(-1, 0)$ et $(0, -1)$ et donc x^* satisfait la LICQ.

Pour $d \in \mathbb{R}^2$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d = 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^S$ vérifie $d_1 = 0$, et $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^W$ implique que $d_2 \leq 0$. Par suite, pour tout vecteur $d = (0, d_2)$ avec $d_2 \leq 0$, on déduit que

$$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = [0 \ d_2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 198 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \end{bmatrix} = 198d_2^2 > 0 \quad \text{si } d_2 \neq 0.$$

Donc x^* satisfait la condition suffisante du second ordre pour le problème **hs017**.

Le problème **hs21mod** de la collection (Bongartz *et al.*, 1995; Gould *et al.*, 2003)

$$\underset{x \in \mathbb{R}^7}{\text{minimiser}} \quad -100 + \frac{1}{100}(x_1^2 + x_3^2 + x_5^2 + x_6^2) + x_2^2 + x_4^2 + x_7^2, \quad (5.11a)$$

$$\text{sujet à} \quad 10x_1 - x_2 - 10 \geq 0 \quad : y_1, \quad (5.11b)$$

$$2 \leq x_1 \leq 50 \quad : (y_2, y_3), \quad (5.11c)$$

$$-50 \leq x_2 \leq 50 \quad : (y_4, y_5), \quad (5.11d)$$

$$x_3 \leq 50 \quad : y_6, \quad (5.11e)$$

$$x_4 - 2 \geq 0 \quad : y_7, \quad (5.11f)$$

$$-x_6 \geq 0 \quad : y_8, \quad (5.11g)$$

$$x_7 \geq 0 \quad : y_9, \quad (5.11h)$$

a pour solution $x^* = (2, 0, 0, 2, 0, 0, 0)$ où la borne inférieure de la contrainte (5.11c) et les contraintes (5.11f)–(5.11h) sont actives. Puisque les gradients de ces contraintes sont linéairement indépendants en x^* , la LICQ y est vérifiée. Les multiplicateurs de Lagrange correspondants aux contraintes actives en x^* sont respectivement $y_2^* = \frac{1}{25}$, $y_7^* = 4$, $y_8^* = 0 = y_9^*$. Donc les contraintes (5.11g) et (5.11h) sont faiblement actives au point x^* .

Pour $d \in \mathbb{R}^7$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d = 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^S$ donne $d_1 = 0 = d_4$, et $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^W$ implique que $d_6 \leq 0 \leq d_7$. La hessienne du lagrangien au point x^* est $\nabla_{xx}\mathcal{L}(w^*) = \text{diag}(\frac{1}{50}, 2, \frac{1}{50}, 2, \frac{1}{50}, \frac{1}{50}, 2)$. Par suite, pour tout vecteur $d = (0, d_2, d_3, 0, d_5, d_6, d_7)$ avec $d_6 \leq 0 \leq d_7$, on obtient

$$d^T \nabla_{xx}\mathcal{L}(w^*)d = 2(d_2^2 + d_7^2) + \frac{1}{50}(d_3^2 + d_5^2 + d_6^2) > 0 \quad \text{si } d \neq 0,$$

et x^* satisfait la condition suffisante du second ordre pour le problème **hs21mod**.

Le problème hs032 de la collection (Hock et Schittkowski, 1981)

$$\underset{x \in \mathbb{R}^3}{\text{minimiser}} \quad (x_1 + 3x_2 + x_3)^2 + 4(x_1 - x_2)^2, \quad (5.12a)$$

$$\text{sujet à} \quad -x_1^3 + 6x_2 + 4x_3 - 3 \geq 0 \quad : y_1, \quad (5.12b)$$

$$1 - x_1 - x_2 - x_3 = 0 \quad : \mu, \quad (5.12c)$$

$$x_1 \geq 0 \quad : y_2, \quad (5.12d)$$

$$x_2 \geq 0 \quad : y_3, \quad (5.12e)$$

$$x_3 \geq 0 \quad : y_4, \quad (5.12f)$$

possède la solution $x^* = (0, 0, 1)$ et les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes actives (5.12c)–(5.12e) sont $\mu^* = -2$, $y_2^* = 0$ et $y_3^* = 4$. Donc la contrainte (5.12d) est faiblement active au point x^* . Les gradients des contraintes actives au point x^* sont respectivement $(-1, -1, -1)$, $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$. Donc x^* vérifie la LICQ.

Pour $d \in \mathbb{R}^3$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d = 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^S$ entraîne $d_2 = 0 = d_1 + d_2 + d_3$, et $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^W$ implique que $d_1 \geq 0$. Par suite, pour tout vecteur $d = (d_1, 0, -d_1)$ avec $d_1 \geq 0$, on tire que

$$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = [d_1 \ 0 \ -d_1] \begin{bmatrix} 10 & -2 & 2 \\ -2 & 26 & 6 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \\ -d_1 \end{bmatrix} = 8d_1^2 > 0 \quad \text{si } d_1 \neq 0,$$

et x^* satisfait la condition suffisante du second ordre pour le problème **hs032**.

Le problème hs35mod de la collection (Bongartz *et al.*, 1995; Gould *et al.*, 2003)

$$\underset{x \in \mathbb{R}^3}{\text{minimiser}} \quad 8x_1 - 6x_2 - 4x_3 + 9 + 2(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3, \quad (5.13a)$$

$$\text{sujet à} \quad -x_1 - x_2 - 2x_3 + 3 \geq 0 \quad : y_1, \quad (5.13b)$$

$$x_2 = 0.5 \quad : \mu, \quad (5.13c)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \quad : (y_2, y_3), \quad (5.13d)$$

a pour solution $x^* = (1.5, 0.5, 0.5)$, où la contrainte (5.13b) est active. Le multiplicateur de Lagrange associé à cette contrainte est $y_1^* = 0$ et cette contrainte est faiblement active au

point x^* qui satisfait la LICQ.

Pour $d \in \mathbb{R}^3$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d = 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^S$ entraîne $d_2 = 0$, et $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^W$ implique que $d_1 + d_2 + 2d_3 \leq 0$. Par suite, pour tout vecteur $d = (d_1, 0, d_3)$ avec $d_1 + 2d_3 \leq 0$, on obtient

$$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = [d_1 \ 0 \ d_3] \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \\ d_3 \end{bmatrix} = 4d_1^2 + 4d_1d_3 + 2d_3^2 > 0 \quad \text{si } d \neq 0,$$

car $A = \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*)$ est définie positive : en effet $|A_{11}| = 4 > 0$, $\det \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 4^2 - 2^2 = 12 > 0$ et $\det(A) = 8 > 0$. Donc x^* satisfait la condition suffisante du second ordre pour le problème **hs35mod**.

Les deux problèmes suivants proviennent de Izmailov et Solodov (2009) où nous avons modifié certaines des contraintes.

Le problème izm-sol49 est l'Exemple 4.9 de (Izmailov et Solodov, 2009, section 4)

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad \frac{1}{2}(x_2 - 1)^2, \quad (5.14a)$$

$$\text{sujet à} \quad x_1 \geq 0 \quad : \quad y_1, \quad (5.14b)$$

$$x_2 - 1 \geq 0 : y_2. \quad (5.14c)$$

Sa solution est $x_a^* = (a, 1)$, $a \geq 0$ et les multiplicateurs de Lagrange correspondants sont $y_1^* = 0$ et $y_2^* = 0$. Donc la contrainte (5.14c) est faiblement active en chaque solution x_a^* où la LICQ est satisfaite. Les deux contraintes (5.14b)–(5.14c) deviennent faiblement actives à la solution $x_0^* = (0, 1)$.

Si $a > 0$, pour $d \in \mathbb{R}^2$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d = 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^S$ donne $d_1 = 0$, et $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^W$ implique que $d_2 \geq 0$. Par suite, pour tout vecteur $d = (0, d_2)$ avec $d_2 \geq 0$, on obtient

$$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = [0 \ d_2] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \end{bmatrix} = d_2^2 > 0 \quad \text{si } d_2 \neq 0,$$

et $x^* = (a, 1)$ satisfait la condition suffisante du second ordre pour le problème **izm-sol49**.

Si $a = 0$, $\mathcal{A}_*^S = \emptyset$ et pour $d \in \mathbb{R}^2$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^W$ implique que

$d_1, d_2 \geq 0$. Par suite pour tout $d = (d_1, d_2) \geq 0$, on obtient que $d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = d_2^2 = 0$ si $d = (d_1, 0)$, $d_1 > 0$. Par conséquent le point stationnaire $x_0^* = (0, 1)$ ne vérifie pas la condition suffisante du second ordre.

Le problème izm-sol-421 est l'exemple 4.21 de (Izmailov et Solodov, 2009, section 4)

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2), \quad (5.15a)$$

$$\text{sujet à} \quad \sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3 \geq 0 : y_1, \quad (5.15b)$$

$$x_1 + x_1^2 + x_3 + \sin x_1 x_3 \geq 0 : y_2. \quad (5.15c)$$

Sa solution est $x^* = (0, 0, 0)$ à laquelle sont associés les multiplicateurs de Lagrange $y_1^* = 0 = y_2^*$. Par conséquent toutes les deux contraintes (5.15b) et (5.15c) sont faiblement actives en x^* qui vérifie la LICQ.

Ici $\mathcal{A}_*^S = \emptyset$ et pour $d \in \mathbb{R}^3$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^W$ donne $d_1 + d_2 + d_3 \geq 0$, $d_1 + d_3 \geq 0$. Par suite, pour tout vecteur $d = (d_1, d_2, d_3)$, on obtient

$$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = [d_1 \ d_2 \ d_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \neq 0 \text{ si } d \neq 0.$$

Donc x^* ne satisfait pas la condition suffisante du second ordre pour le problème **izm-sol421**.

Le problème jitt-osb est l'exemple 2.1 de Jittorntrum et Osborne (1980)

Ce problème est un cas pathologique qu'aucun des solveurs de nos tests n'arrive à résoudre.

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad x_2, \quad (5.16a)$$

$$\text{sujet à} \quad x_2 - x_1^2 \geq 4 \quad : y_1, \quad (5.16b)$$

$$x_1 + \xi x_2 \geq 0 \quad : y_2. \quad (5.16c)$$

où on a choisi $\xi = 1$. Sa solution est $x^* = (0, 0)$ et les multiplicateurs correspondants sont $y_1^* = 1$, $y_2^* = 0$. Donc la contrainte (5.16c) est faiblement active en x^* où la LICQ est vérifiée.

Pour $d \in \mathbb{R}^2$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d = 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^S$ entraîne $d_2 = 0$, et $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$

pour $i \in \mathcal{A}_*^W$ implique que $d_1 \geq 0$. Par suite, pour tout vecteur $d = (d_1, 0)$ avec $d_2 \geq 0$, on obtient

$$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = [d_1 \ 0] \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \end{bmatrix} = -2d_1^2 < 0 \quad \text{si } d_1 \neq 0,$$

et x^* ne satisfait pas la condition suffisante du second ordre pour le problème **jitt-osb**.

Le problème mcwit-32 est l'exemple 3.2 de (McCormick et Witzgall, 2001, section 3)

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad \sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2} + \sqrt{(x_1 + 1)^2 + x_2^2} - 2, \quad (5.17a)$$

$$\text{sujet à} \quad x_2 \geq 0 \quad : y_1, \quad (5.17b)$$

$$1 - x_2 \geq 0 \quad : y_2. \quad (5.17c)$$

Son ensemble de points stationnaires est $\{(a, 0) \mid -1 \leq a \leq 1\}$. Les multiplicateurs de Lagrange correspondants sont $y_1^* = y_2^* = 0$. La contrainte (5.17b) est donc faiblement active pour tout point stationnaire où la LICQ est satisfaite.

Ici $\mathcal{A}_*^S = \emptyset$ et pour $d \in \mathbb{R}^2$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^W$ donne $d_2 \geq 0$. Par suite, pour tout $d = (d_1, d_2)$ avec $d_1, d_2 \geq 0$, on a

$$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = [d_1 \ d_2] \begin{bmatrix} \frac{3}{2(1-a^2)} & 0 \\ 0 & \frac{2}{a+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \frac{3}{2(1-a^2)} d_1^2 + \frac{2}{a+1} d_2^2 > 0, \quad \text{si } d \neq 0,$$

pour $-1 < a < 1$. Donc x^* satisfait la condition suffisante du second ordre pour le problème **mcwit-32**.

Le problème mcwit-33b

s'inspire de l'exemple 3.3 de McCormick et Witzgall (2001) où nous avons lissé les contraintes

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad x_2, \quad (5.18a)$$

$$\text{sujet à} \quad x_1 - 1 \geq 0 \quad : y_1, \quad (5.18b)$$

$$x_2 - (x_1 - 1)^2 \geq 0 : y_2. \quad (5.18c)$$

La solution du problème **mcwit-33b** est $(1, 0)$ et les multiplicateurs de Lagrange correspondants sont $y_1^* = 0$ et $y_2^* = 1$. Donc la contrainte (5.18b) est faiblement active au point x^* qui vérifie la LICQ.

Pour $d \in \mathbb{R}^2$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d = 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^S$ donne $d_2 = 0$, et la condition $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^W$ implique que $d_1 \geq 0$. Par suite, pour $d = (d_1, 0)$ avec $d_1 \geq 0$, on obtient

$$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = [d_1 \ 0] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2d_1^2 > 0 \quad \text{si } d_1 \neq 0,$$

et x^* satisfait la condition suffisante du second ordre pour le problème **mcwit-33b**.

Le problème mcwit-34

est l'exemple 3.4 de McCormick et Witzgall (2001)

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad \sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2} + \sqrt{(x_1 + 1)^2 + x_2^2} - 2, \quad (5.19a)$$

$$\text{sujet à} \quad x_1 \geq 0 \quad : y_1, \quad (5.19b)$$

$$x_2 \geq 0 \quad : y_2. \quad (5.19c)$$

L'ensemble des points stationnaires est $\{(a, 0) \mid 0 \leq a \leq 1\}$ et les multiplicateurs de Lagrange associés sont $y_1^* = 0 = y_2^*$. Donc la contrainte (5.19c) est faiblement active au point x^* , qui vérifie la LICQ. Si $x^* = (0, 0)$, les deux contraintes deviennent faiblement actives en ce point.

Si $a > 0$, pour $d \in \mathbb{R}^2$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d = 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^S$ donne $d_1 = 0$, et $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^W$ implique que $d_2 \geq 0$. Par suite, pour tout vecteur $d = (0, d_2)$ avec $d_2 \geq 0$, on a

$$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = [0 \ d_2] \begin{bmatrix} \frac{3}{2(1-a^2)} & 0 \\ 0 & \frac{2}{a+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \end{bmatrix} = \frac{2}{a+1} d_2^2 > 0 \quad \text{si } d_2 \neq 0,$$

et $x^* = (a, 0)$, $a > 0$ satisfait la condition suffisante du second ordre pour le problème **mcwit-34**.

Si $a = 0$, alors $\mathcal{A}_*^S = \emptyset$ et pour $d \in \mathbb{R}^2$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^W$ entraîne $d_1, d_2 \geq 0$. Par suite, pour tout $d = (d_1, d_2) \geq 0$, on a $d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = \frac{3}{2}(d_1^2 + 2d_2^2) > 0$ si $d \neq 0$, et $x^* = (0, 0)$ satisfait la condition suffisante du second ordre pour le problème **mcwit-34**.

Le problème noc-wright11

s'inspire de l'exemple 1.1 de Nocedal et Wright (2006) où nous avons remplacé la fonction objectif

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2, \quad (5.20a)$$

$$\text{sujet à} \quad x_2 - x_1^2 \geq 0 \quad : y_1, \quad (5.20b)$$

$$2 - x_1 - x_2 \geq 0 \quad : y_2. \quad (5.20c)$$

La solution est $x^* = (1, 1)$ à laquelle sont associés les multiplicateurs de Lagrange $y_1^* = 0 = y_2^*$. Les deux contraintes (5.20b) et (5.20c) sont donc faiblement actives au point x^* . Les gradients des deux contraintes actives au point x^* sont respectivement $(-2, 1)$ et $(-1, -1)$ et la LICQ est satisfaite en x^* .

Pour ce problème, $\mathcal{A}_*^S = \emptyset$ et pour $\text{din}\mathbb{R}^2$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^W$ donne $-2d_1 + d_2 \geq 0$ et $d_1 + d_2 \leq 0$. Par suite, puisque $\nabla_{xx}\mathcal{L}(w^*) = \text{diag}(2, 2)$ est définie positive, on en déduit que $d^T \nabla_{xx}\mathcal{L}(w^*)d = 2(d_1^2 + d_2^2) > 0$, si $d \neq 0$, et x^* satisfait la condition suffisante du second ordre pour le problème **noc-wright11**.

Le problème noc-wright127 est l'exemple 12.7 (Nocedal et Wright, 2006)

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad x_1, \quad (5.21a)$$

$$\text{sujet à} \quad x_2 \geq 0 \quad : y_1, \quad (5.21b)$$

$$1 - (x_1 - 1)^2 - x_2^2 \geq 0 : y_2. \quad (5.21c)$$

Sa solution est $x^* = (0, 0)$ à laquelle sont associés les multiplicateurs de Lagrange $y_1^* = 0$ et $y_2^* = \frac{1}{2}$. La contrainte (5.21b) est donc faiblement active au point x^* . Les gradients des contraintes (5.21b) et (5.21c), toutes actives au point x^* , sont respectivement $(0, 1)$ et $(2, 0)$ et la LICQ est satisfaite en ce point.

Pour un vecteur $d \in \mathbb{R}^2$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d = 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^S$ donne $2d_1 = 0$, et la condition $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^W$ implique que $d_2 \geq 0$. Par suite pour tout $d = (0, d_2)$ avec $d_2 \geq 0$, il vient

$$d^T \nabla_{xx}\mathcal{L}(w^*)d = [0 \ d_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \end{bmatrix} = d_2^2 > 0 \text{ si } d_2 \neq 0,$$

et x^* vérifie la condition suffisante du second ordre pour le problème **noc-wright127**.

Le problème **noc-wrightch165**

est l'exemple de (Nocedal et Wright, 2006, chap. 16) qui illustre le manque de complémentarité stricte

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad x_1^2 + (x_2 + 1)^2, \quad (5.22a)$$

$$\text{sujet à} \quad x_1 \geq 0 \quad : y_1, \quad (5.22b)$$

$$1 + x_2 \geq 0 \quad : y_2. \quad (5.22c)$$

Sa solution est $x^* = (0, -1)$ à laquelle sont associés les multiplicateurs de Lagrange $y_1^* = 0$ et $y_2^* = 0$. Les deux contraintes (5.22b) et (5.22c) sont faiblement actives au point x^* . Les gradients des contraintes (5.22b) et (5.22c), toutes actives en x^* , sont respectivement $(1, 0)$ et $(0, 1)$ et x^* vérifie la LICQ.

Puisque $\mathcal{A}_*^S = \emptyset$, pour $d \in \mathbb{R}^2$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^W$ donne $d_1, d_2 \geq 0$. On obtient pour un tel d que

$$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = [d_1 \ d_2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = 2(d_1^2 + d_2^2) > 0 \quad \text{si } d \neq 0,$$

et x^* satisfait la condition suffisante du second ordre pour le problème **noc-wright165**.

Le problème **noc-wright222**

La fonction objectif de ce problème est la fonction de Rosenbrock en deux dimensions et s'inspire de l'exercice 2.1 de Nocedal et Wright (2006) à laquelle nous avons ajouté deux contraintes faiblement actives

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad 10(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2, \quad (5.23a)$$

$$\text{sujet à} \quad 1 - x_1 \geq 0 \quad : y_1, \quad (5.23b)$$

$$1 - x_2 \geq 0 \quad : y_2. \quad (5.23c)$$

La solution est $x^* = (1, 1)$ et les multiplicateurs de Lagrange correspondants sont $y_1^* = 0 = y_2^*$. Les deux contraintes (5.23b) et (5.23c) sont faiblement actives au point x^* qui vérifie la LICQ.

Ici, $\mathcal{A}_*^S = \emptyset$ et pour $d \in \mathbb{R}^2$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^W$ implique $d_1, d_2 \leq 0$.

Il s'en suit que

$$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = [d_1 \ d_2] \begin{bmatrix} 82 & -40 \\ -40 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = 82d_1^2 + 20d_2^2 - 80d_1d_2 > 0 \text{ si } d \neq 0,$$

car $\nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*)$ est définie positive : $|A_{11}| = 82 > 0$, $\det(A) = 40 > 0$ et x^* satisfait la condition suffisante du second ordre pour le problème **noc-wright222**.

Le problème **noc-wright43**

a pour fonction objectif la fonction de Rosenbrock en dimension N et s'inspire de l'exercice 4.3 de Nocedal et Wright (2006) :

$$\begin{aligned} \underset{x \in \mathbb{R}^N}{\text{minimiser}} \quad & \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} 10(x_{2i} - x_{2i-1}^2)^2 + (1 - x_1)^2, \\ \text{sujet à} \quad & 1 - x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad : y_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (5.24a)$$

$$\text{sujet à} \quad 1 - x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad : y_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.24b)$$

La solution optimale est $x_i^* = 1$, $i = 1, \dots, N$ et les multiplicateurs de Lagrange associés sont $y_i^* = 0$, $i = 1, \dots, N$. Toutes les contraintes sont faiblement actives au point x^* qui vérifie la LICQ.

Ce problème est l'équivalent de **noc-wright222** en dimension N et comme dans le cas de **noc-wright222** $\mathcal{A}_*^S = \emptyset$ et pour $d \in \mathbb{R}^N$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^W$ donne $d_i \leq 0$, $i = 1, \dots, N$. Par suite pour $d = (0, 0, d_3, 2d_3, 0, \dots, 0)$ avec $d_3 \leq 0$ on obtient

$$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = [0 \ 0 \ d_3 \ 2d_3 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} 82 & -4 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -40 & 20 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 80 & -40 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & -40 & 20 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -40 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_3 \\ 2d_3 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = 0.$$

Par conséquent, x^* ne satisfait pas la condition suffisante du second ordre pour le problème **noc-wright43**.

Le problème nonscomp provient de (Bongartz *et al.*, 1995; Gould *et al.*, 2003)

$$\underset{x \in \mathbb{R}^{10000}}{\text{minimiser}} \quad (x_1 - 1)^2 + \sum_{i=2}^{10000} 4(x_i - x_{i-1}^2)^2, \quad (5.25a)$$

$$\text{sujet à} \quad 1 \leq x_i \leq 100, \text{ si } i \in I_3 \quad : (y_i, y_{i+1}), \quad i \in I_3, \quad (5.25b)$$

$$-100 \leq x_i \leq 100, \text{ si } i \notin I_3 \quad : (y_i, y_{i+1}), \quad i \notin I_3, \quad (5.25c)$$

où $I_3 := \{j \mid j = 3k, 1 \leq k \leq 3333\}$. La solution de **nonscomp** est $x^* = (1, 1, \dots, 1)$ qui vérifie la LICQ. Les bornes inférieures des contraintes (5.25b) sont faiblement actives au point x^* car les multiplicateurs de Lagrange associés à ces contraintes sont $y_i^* = 0$, $i \in I_3$.

Ici on a $\mathcal{A}_*^S = \emptyset$ et pour un $d \in \mathbb{R}^N$ tel que $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^W$, on a $d_i \geq 0$. Par suite, puisque $\nabla_{xx}\mathcal{L}(w^*)$ est définie positive

$$A = \nabla_{xx}(w^*) = \begin{bmatrix} 10 & -4 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -4 & 10 & -4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -4 & 10 & -4 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -4 & 10 & -4 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -4 & 10 \end{bmatrix},$$

on déduit que x^* satisfait la condition suffisante du second ordre pour le problème **nonscomp**.

Le problème nsc est l'exemple canonique, en dimension un

$$\underset{x \in \mathbb{R}}{\text{minimiser}} \quad \frac{1}{2}x^2, \quad (5.26a)$$

$$\text{sujet à} \quad x \geq 0: y, \quad (5.26b)$$

qui possède la solution optimale $x^* = 0$ à laquelle est associé le multiplicateur de Lagrange $y^* = 0$. L'unique contrainte du problème (5.26b) est donc faiblement active au point x^* qui vérifie la LICQ.

Pour ce problème on a trivialement $\mathcal{A}_*^S = \emptyset$ et avec un vecteur $d \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$, $i \in \mathcal{A}_*^W$, soit $d \geq 0$, il vient que $d^T \nabla \mathcal{L}(w^*) d = d^2 > 0$ si $d \neq 0$. Donc la condition suffisante du second ordre est satisfaite en x^* .

Le problème **nsc2D** provient de (Wright et Orban, 2002, section 4)

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2), \quad (5.27a)$$

$$\text{sujet à} \quad x_1 - 1 \geq 0 : y_1, \quad (5.27b)$$

$$x_2 \geq 0 \quad : y_2. \quad (5.27c)$$

Sa solution est $x^* = (1, 0)$ à laquelle correspondent les multiplicateurs de Lagrange $y_1^* = 1$ et $y_2^* = 0$. La contrainte (5.27c) est faiblement active au point x^* où la LICQ est vérifiée.

Pour $d \in \mathbb{R}^2$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d = 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^S$ donne $d_1 = 0$, et la condition $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^W$ implique que $d_2 \geq 0$. Par suite, pour tout vecteur $d = (0, d_2)$ avec $d_2 \geq 0$, on obtient

$$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = [0 \ d_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \end{bmatrix} = d_2^2 > 0 \quad \text{si } d_2 \neq 0,$$

et x^* satisfait la condition suffisante du second ordre pour le problème **nsc2D**.

Le problème **nsc2Dcarl**

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2), \quad (5.28a)$$

$$\text{sujet à} \quad x_1 + x_2 - 3 \geq 0 : y_1, \quad (5.28b)$$

$$x_1 - \frac{3}{2} \geq 0 \quad : y_2, \quad (5.28c)$$

a pour solution optimale $x^* = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ et les multiplicateurs correspondants sont $y_1^* = \frac{3}{2}$ et $y_2^* = 0$. Les deux contraintes (5.28b) et (5.28c) sont actives au point x^* qui vérifie la LICQ. De plus la contrainte (5.28c) est faiblement active au point x^* .

Pour $d \in \mathbb{R}^2$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d = 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^S$ donne $d_1 + d_2 = 0$ tandis que $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^W$ implique que $d_1 \geq 0$. Par suite, pour $d = (d_1, -d_1)$ avec $d_1 \geq 0$, on obtient

$$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = [d_1 \ -d_1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ -d_1 \end{bmatrix} = 2d_1^2 > 0 \quad \text{si } d_1 \neq 0,$$

et x^* satisfait la condition suffisante du second ordre pour le problème **nsc2Dcarl**.

Le problème **nsc2Dnl**

est un exemple avec deux contraintes non linéaires

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad e^{x_1^2} + e^{x_2^2}, \quad (5.29a)$$

$$\text{sujet à} \quad e^{x_2} x_1 \geq 0 \quad : \quad y_1, \quad (5.29b)$$

$$x_2 \cos x_1 \geq 0 : y_2. \quad (5.29c)$$

Sa solution est $x^* = (0, 0)$ à laquelle sont associés les multiplicateurs de Lagrange $y_1^* = 0 = y_2^*$. Toutes les deux contraintes sont faiblement actives au point x^* qui vérifie la LICQ.

Ici $\mathcal{A}_*^S = \emptyset$ et avec $d \in \mathbb{R}^2$ tel que $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$, $i \in \mathcal{A}_*^W$, soit $d_1, d_2 \geq 0$, on obtient

$$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = [d_1 \ d_2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = 2(d_1^2 + d_2^2) > 0 \quad \text{si } d \neq 0,$$

et x^* satisfait la condition suffisante du second ordre pour le problème **nsc2Dnl**.

Le problème **nsc2Dzc**

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad \frac{1}{2} [(x_1 - 1)^2 + x_2^2], \quad (5.30a)$$

$$\text{sujet à} \quad 1 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0 \quad : \quad y_1, \quad (5.30b)$$

$$x_2 \geq 0 \quad : \quad y_2. \quad (5.30c)$$

La solution est $x^* = (1, 0)$ à laquelle sont associés les multiplicateurs de Lagrange $y_1^* = 0 = y_2^*$. Donc les deux contraintes (5.30b) et (5.30c) sont faiblement actives au point x^* où la LICQ est vérifiée.

Puisque $\mathcal{A}_*^S = \emptyset$, pour $d \in \mathbb{R}^2$ tel que $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$, $i \in \mathcal{A}_*^W$, soit $d_1 \leq 0 \leq d_2$, on obtient

$$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = [d_1 \ d_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = d_1^2 + d_2^2 > 0 \quad \text{si } d \neq 0,$$

et x^* satisfait la condition suffisante du second ordre pour le problème **nsc2Dzc**.

Le problème **nscgene**

est une version en dimension N de l'exemple canonique **nsc**

$$\begin{aligned} \underset{x \in \mathbb{R}^N}{\text{minimiser}} \quad & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N x_i^2, \\ \text{sujet à} \quad & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N: \quad y_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (5.31a)$$

$$\text{sujet à} \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N: \quad y_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.31b)$$

La solution optimale est $x_i^* = 0$, $i = 1, 2, \dots, N$ avec les multiplicateurs de Lagrange correspondants $y_i^* = 0$, $i = 1, 2, \dots, N$. Toutes les contraintes (5.31b) sont faiblement actives au point x^* où la LICQ est clairement vérifiée.

Pour ce problème $\mathcal{A}_*^S = \emptyset$, et pour $d \in \mathbb{R}^N$ tel que $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$, $i \in \mathcal{A}_*^W$, soit $d_i \leq 0$, $i = 1, 2, \dots, N$, on obtient

$$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_N^2 > 0 \quad \text{si } d \neq 0,$$

et x^* vérifie la condition suffisante du second ordre pour le problème **nscgene**.

Le problème **nscgene2**

est une version du problème précédent avec des variables décalées **nscgene**

$$\begin{aligned} \underset{x \in \mathbb{R}^N}{\text{minimiser}} \quad & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (x_i - i)^2, \\ \text{sujet à} \quad & x_i - i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N: \quad y_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (5.32a)$$

$$\text{sujet à} \quad x_i - i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N: \quad y_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.32b)$$

Sa solution optimale est $x_i^* = i$, $i = 1, 2, \dots, N$ et les multiplicateurs de Lagrange correspondants sont $y_i^* = 0$, $i = 1, 2, \dots, N$. Il s'en suit alors que toutes les contraintes de bornes (5.32b) sont faiblement actives au point x^* où comme précédemment la LICQ est satisfaite.

Ici $\mathcal{A}_*^S = \emptyset$ et avec $d \in \mathbb{R}^N$ tel que $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$, $i \in \mathcal{A}_*^W$, soit $d_i \leq 0$, $i = 1, 2, \dots, N$, on obtient comme précédemment que $d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_N^2 > 0$ si $d \neq 0$, et donc x^* satisfait la condition suffisante du second ordre pour le problème **nscgene2**.

Le problème **oslbqp** provient de (Bongartz *et al.*, 1995; Gould *et al.*, 2003)

$$\underset{x \in \mathbb{R}^8}{\text{minimiser}} \quad x_1 + 2x_5 - x_8 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 x_i^2, \quad (5.33a)$$

$$\text{sujet à} \quad x_1 - 2.5 \geq 0 \quad : y_1, \quad (5.33b)$$

$$0 \leq x_2 \leq 4.1 \quad : (y_2, y_3), \quad (5.33c)$$

$$x_3, x_4 \geq 0 \quad : (y_4, y_5), \quad (5.33d)$$

$$0.5 \leq x_5 \leq 4 \quad : (y_6, y_7), \quad (5.33e)$$

$$x_6, x_7 \geq 0 \quad : (y_8, y_9), \quad (5.33f)$$

$$0 \leq x_8 \leq 4.3 \quad : (y_{10}, y_{11}), \quad (5.33g)$$

et a pour solution optimale $x^* = (2.5, 0, 0, 0, 0.5, 0, 0, 1)$. La contrainte (5.33b), les bornes inférieures des contraintes (5.33c) et (5.33e) ainsi que les contraintes (5.33d) et (5.33f) sont actives au point x^* à laquelle sont associés les multiplicateurs de Lagrange $y_1^* = 3.5, y_2^* = 0, y_4^* = 0, y_5^* = 0, y_6^* = 2.5, y_8^* = 0 = x_6^*$ et $y_9^* = 0$. Donc la borne inférieure de (5.33c) et les contraintes (5.33d) et (5.33f) sont faiblement actives au point x^* qui vérifie la LICQ.

Pour $d \in \mathbb{R}^8$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d = 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^S$ donne $d_1 = d_5 = 0$, et $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^W$ implique que $d_2, d_3, d_4, d_6, d_7 \geq 0$. Par suite, vu que $\nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*)$ est la matrice identité, pour un vecteur $d = (0, d_2, d_3, d_4, 0, d_6, d_7, d_8)$ avec $d_i \geq 0, \forall i$, on obtient

$$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_6^2 + d_7^2 + d_8^2 > 0 \quad \text{si } d \neq 0,$$

et x satisfait la condition suffisante du second ordre pour le problème **oslbqp**.

Le problème **pentdi** provient de (Bongartz *et al.*, 1995; Gould *et al.*, 2003)

$$\underset{x \in \mathbb{R}^{1000}}{\text{minimiser}} \quad \sum_{i=1}^N 6x_i^2 - 3x_1 + x_2 + x_{N/2} - 1 - 3x_{N/2} + 4x_{N/2+1} + \sum_{i=N/2+3}^N x_i + \sum_{i=1}^{N-2} (-4x_i x_{i+1} + x_i x_{i+2}), \quad (5.34)$$

$$\text{sujet à} \quad x_i \geq 0 \quad : y_i, \quad i = 1, 2, \dots, N = 1000. \quad (5.35)$$

Tous les solveurs obtiennent le point stationnaire $x_1^* = \frac{1}{4} = x_{\frac{N}{2}}$ et $x_i^* = 0, i \notin \{1, \frac{N}{2}\}$. Les

$N - 2$ contraintes de bornes de (5.35) sont donc actives au point x^* , à l'exception de $x_1 \geq 0$ et $x_{N/2} \geq 0$. Les multiplicateurs de Lagrange correspondants à ces contraintes actives sont $y_2^* = 0, y_3^* = \frac{1}{4}, y_i^* = 0, i = 4, 5, \dots, \frac{N}{2} - 3, y_{N/2-2} = x_{\frac{N}{2}} = \frac{1}{4}, y_{\frac{N}{2}-1} = 0$ et $y_{\frac{N}{2}+1} = 3, y_{\frac{N}{2}+2} = x_{\frac{N}{2}} = \frac{1}{4}$ et $y_i = 1, i = \frac{N}{2} + 3, \dots, N$. Il s'en suit donc que les contraintes $x_i \geq 0, i = 2, 4, \dots, \frac{N}{2} - 3$ sont faiblement actives au point x^* où la LICQ est satisfaite.

Pour ce problème, $\mathcal{A}_*^S = \emptyset$ et pour $d \in \mathbb{R}^{1000}$ tel que $\nabla c_i(x^*)^T d = 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^W$, soit $d_i \geq 0, i = 1, \dots, 1000$, on a

$$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = d^T \begin{bmatrix} 12 & -4 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -4 & 12 & -4 & 1 & \ddots & \dots & \vdots \\ 1 & -4 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -4 & 1 \\ \vdots & \dots & \ddots & 1 & -4 & 12 & -4 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -4 & 12 \end{bmatrix} d > 0 \text{ si } d \neq 0,$$

car $A = \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*)$ est semi-définie positive, comme matrice symétrique à diagonale strictement dominante, avec des éléments diagonaux strictement positifs. Donc x vérifie la condition suffisante du second ordre pour le problème **pentdi**.

Le problème s234 provient de (Schittkowski, 1987)

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad (x_2 - x_1)^4 - (1 - x_1), \quad (5.36a)$$

$$\text{sujet à} \quad 1 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0 \quad : y_1, \quad (5.36b)$$

$$x_1 - \frac{1}{5} \geq 0 \quad : y_2, \quad (5.36c)$$

$$2 - x_1 \geq 0 \quad : y_3, \quad (5.36d)$$

$$x_2 - \frac{1}{5} \geq 0 \quad : y_4, \quad (5.36e)$$

$$2 - x_2 \geq 0 \quad : y_5, \quad (5.36f)$$

et a pour solution $x^* = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ à laquelle sont associés les multiplicateurs de Lagrange $y_2^* = 1, y_1^* = 0 = y_3^* = y_4^*$. On en déduit que la contrainte (5.36e) est faiblement active au point x^* . Les gradients des deux contraintes (5.36c) et (5.36e) actives au point x^* sont respectivement $(1, 0)$ et $(0, 1)$ et x^* vérifie la LICQ.

Pour $d \in \mathbb{R}^2$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d = 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^S$ donne $d_1 = 0$, et $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^W$ implique que $d_2 \geq 0$. Par suite, pour $d = (0, d_2)$ avec $d_2 \geq 0$, on obtient

$$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = 0 \text{ pour tout } d \neq 0 \text{ car } \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) = 0,$$

et x ne peut satisfaire la condition suffisante du second ordre pour le problème **s234**.

Le problème s242

provient de Schittkowski (1987)

$$\underset{x \in \mathbb{R}^3}{\text{minimiser}} \quad \sum_{i=1}^{10} \left[e^{-\frac{i}{10}x_1} - e^{-\frac{i}{10}x_2} - x_3(e^{-\frac{i}{10}} - e^{-i}) \right]^2, \quad (5.37a)$$

$$\text{sujet à} \quad 0 \leq x_1 \leq 10 \quad : (y_1, y_2), \quad (5.37b)$$

$$0 \leq x_2 \leq 10 \quad : (y_3, y_4), \quad (5.37c)$$

$$0 \leq x_3 \leq 10 \quad : (y_5, y_6), \quad (5.37d)$$

possède les points stationnaires $x^* = (1, 10, 1)$ et $x_\alpha^* := (\alpha, \alpha, 0)$, $0 \leq \alpha \leq 10$, auxquelles correspondent les multiplicateurs de Lagrange $y_i^* = 0$, $i = 1, 2, \dots, 6$. Donc toute contrainte active en une solution est faiblement active. La LICQ est satisfaite en toute solution de **s242**. La borne supérieure de la contrainte (5.37c) est faiblement active à la solution $x^* = (1, 10, 1)$, tandis que les bornes inférieures des contraintes (5.37b) – (5.37d) sont faiblement actives à la solution $x_0^* = (0, 0, 0)$. Finalement Les bornes supérieures des contraintes (5.37b) – (5.37c) et la borne inférieure de (5.37d) sont faiblement actives à la solution $x_{10}^* = (10, 10, 0)$. Comme $\mathcal{A}_*^S = \emptyset$, pour tout $d \in \mathbb{R}^3$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$, $i \in \mathcal{A}_*^W$ donne $d_2 \leq 0$. De plus la hessienne du lagrangien

$$A = \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) = \begin{bmatrix} 1.75 & -0.02 & 2.93 \\ -0.02 & 0.04 & -0.11 \\ 2.93 & -0.11 & 6.12 \end{bmatrix},$$

est définie positive car $|A_{11}| = 1.75 > 0$, $\det \begin{bmatrix} 1.75 & -0.02 \\ -0.02 & 0.04 \end{bmatrix} = 0.007 > 0$ et $\det(A) = 0.001 > 0$, et $x^* = (1, 10, 1)$ satisfait la condition suffisante du second ordre pour le problème **s242**.

De même pour la solution locale $x_0 = (0, 0, 0)$, $\mathcal{A}_*^S = \emptyset$ et pour $d \in \mathbb{R}^3$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$, $i \in \mathcal{A}_*^W$ implique que $d_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$. Pour $d = (d_1, d_1, 0)$, $d_1 > 0$, on

obtient que

$$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = [d_1 \ d_1 \ 0] \begin{bmatrix} 7.70 & -7.7 & 5.45 \\ -7.7 & 7.7 & -5.45 \\ 5.45 & -5.45 & 6.12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \text{ pour tout } d_1$$

et donc $x_0 = (0, 0, 0)$ ne vérifie pas la condition suffisante du second ordre pour **s242**.

Enfin pour $x_{10} = (10, 10, 0)$, $\mathcal{A}_*^S = \emptyset$ et pour tout $d \in \mathbb{R}^3$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$, $i \in \mathcal{A}_*^W$ donne $d_1, d_2 \leq 0$ et $d_3 \geq 0$. Avec $d = (d_1, d_1, 0)$, $d_1 < 0$, on obtient

$$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = [d_1 \ d_1 \ 0] \begin{bmatrix} 0.004 & -0.004 & 0.113 \\ -0.004 & 0.004 & -0.113 \\ 0.113 & -0.113 & 6.12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \text{ pour tout } d_1$$

et tout comme précédemment, $x_0 = (0, 0, 0)$ ne vérifie pas la condition suffisante du second ordre pour **s242**.

Le problème s244 de (Schittkowski, 1987)

$$\underset{x \in \mathbb{R}^3}{\text{minimiser}} \quad \sum_{i=1}^{10} \left[e^{-\frac{i}{10}x_1} - x_3 e^{-\frac{i}{10}x_2} - (e^{-\frac{i}{10}} - 5e^{-i}) \right]^2, \quad (5.38a)$$

$$\text{sujet à} \quad 0 \leq x_1 \leq 10 \quad : (y_1, y_2), \quad (5.38b)$$

$$0 \leq x_2 \leq 10 \quad : (y_3, y_4), \quad (5.38c)$$

$$0 \leq x_3 \leq 10 \quad : (y_5, y_6), \quad (5.38d)$$

admet la solution $x^* = (1, 10, 5)$ à laquelle correspondent les multiplicateurs de Lagrange $y_i^* = 0$, $i = 1, 2, \dots, 5$. Par conséquent, la borne inférieure de la contrainte (5.38c) est faiblement active à la solution x^* qui vérifie la LICQ.

Ici $\mathcal{A}_*^S = \emptyset$ et avec $d \in \mathbb{R}^3$ tel que $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$, $i \in \mathcal{A}_*^W$, soit $d_2 \leq 0$, on a

$$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = [d_1 \ d_2 \ d_3] \begin{bmatrix} 1.75 & -0.149 & 0.149 \\ -0.149 & 0.118 & -0.18 \\ 0.149 & -0.18 & 0.31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} > 0 \text{ si } d \neq 0,$$

car $A = \mathcal{L}(w^*)$ est définie positive : en effet $|A_{11}| = 1.75$, $\det \begin{bmatrix} 1.75 & -0.149 \\ -0.149 & 0.118 \end{bmatrix} = .18$ et

$\det A = .006 > 0$. Par voie de conséquence, x^* satisfait la condition suffisante du second ordre pour le problème **s244**.

Problem s268 de la collection (Schittkowski, 1987)

$$\underset{x \in \mathbb{R}^5}{\text{minimiser}} \quad x^T D^T D x - 2d^T D x - d^T d, \quad (5.39a)$$

$$\text{sujet à} \quad -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + 5 \geq 0 \quad : y_1, \quad (5.39b)$$

$$10x_1 + 10x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 4x_5 - 20 \geq 0 : y_2, \quad (5.39c)$$

$$-8x_1 + x_2 - 2x_3 - 5x_4 + 3x_5 + 40 \geq 0 : y_3, \quad (5.39d)$$

$$8x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 - 3x_5 - 11 \geq 0 \quad : y_4, \quad (5.39e)$$

$$-4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 + x_5 + 30 \geq 0 : y_5, \quad (5.39f)$$

avec

$$D = \begin{bmatrix} -74 & 80 & 18 & -11 & -4 \\ 14 & -69 & 21 & 28 & 0 \\ 66 & -72 & -5 & 7 & 1 \\ -12 & 66 & -30 & -23 & 3 \\ 3 & 8 & -7 & -4 & 1 \\ 4 & -12 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad d = \begin{bmatrix} 51 \\ -61 \\ -56 \\ 69 \\ 10 \\ -12 \end{bmatrix},$$

a pour solution $x^* = (1, 2, -1, 3, -4)$. La contrainte (5.39f) est active au point x^* et le multiplicateur de Lagrange correspondant est $y_5^* = 0$. Par conséquent cette contrainte est faiblement active en ce point stationnaire qui satisfait la LICQ.

Ici $\mathcal{A}_*^S = \emptyset$ et pour $d \in \mathbb{R}^5$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$, $i \in \mathcal{A}_*^W$ donne $-4d_1 - 2d_2 + 3d_3 - 5d_4 + d_5 \geq 0$. Puisque

$$\nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) = \begin{bmatrix} 10197 & -12454 & -1013 & 1948 & 329 \\ -12454 & 20909 & -1733 & -4914 & -186 \\ -1013 & -1733 & 1755 & 1089 & -174 \\ 1948 & -4914 & 1089 & 1515 & -22 \\ 329 & -186 & -174 & -22 & 27 \end{bmatrix},$$

est définie positive, on en déduit que x^* satisfait la condition suffisante du second ordre pour le problème **s268**.

Le problème s270 de la collection (Schittkowski, 1987)

$$\begin{aligned}
 & \underset{x \in \mathbb{R}^5}{\text{minimiser}} && x_1 x_2 x_3 x_4 - 3x_1 x_2 x_4 - 4x_1 x_2 x_3 + 12x_1 x_2 - x_2 x_3 x_4 + \\
 & && 3x_2 x_4 + 4x_2 x_3 - 12x_2 - 2x_1 x_3 x_4 + 6x_1 x_4 + 8x_1 x_3 - \\
 & && 24x_1 + 2x_3 x_4 - 6x_4 - 8x_3 + 24 + \frac{3}{2}x_5^4 - \frac{23}{4}x_5^3 + \frac{21}{4}x_5^2, && (5.40a) \\
 \text{sujet à} &&& 34 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 \geq 0 && : y_1, && (5.40b) \\
 &&& x_1 - 1 \geq 0 && : y_2, && (5.40c) \\
 &&& x_2 - 2 \geq 0 && : y_3, && (5.40d) \\
 &&& x_3 - 3 \geq 0 && : y_4, && (5.40e) \\
 &&& x_4 - 4 \geq 0 && : y_5, && (5.40f)
 \end{aligned}$$

admet pour solution $x^* = (1, 2, 3, 4, 2)$ à laquelle correspondent les multiplicateurs de Lagrange $y_i^* = 0$, $i = 1, 2, \dots, 5$. Donc toutes les contraintes sont actives à la solution x^* . Puisque les gradients des contraintes actives au point x^* sont linéairement indépendants, il s'en suit que x^* vérifie la LICQ.

Ici $\mathcal{A}_*^S = \emptyset$ et avec $d \in \mathbb{R}^5$ tel que $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$, $i \in \mathcal{A}_*^W$, soit $d_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, on obtient

$$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = 0 \quad \text{pour tout } d \text{ car } \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) = 0,$$

et x^* ne satisfait pas la condition suffisante du second ordre pour le problème **s270**.

Le problème s284 issu de (Schittkowski, 1987)

$$\underset{x \in \mathbb{R}^{15}}{\text{minimiser}} \quad - \sum_{i=1}^{15} c_i x_i, \tag{5.41a}$$

$$\text{sujet à} \quad b_i - \sum_{j=1}^{15} a_{ij} x_j^2 \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 10: y_i, \quad i = 1, 2, \dots, 10 \tag{5.41b}$$

a pour solution $x^* = (1, 1, \dots, 1)$, où toutes les dix contraintes (5.41b) sont actives au point x^* . Les multiplicateurs de Lagrange correspondants sont $y_1^* = 0 = y_2^* = \dots = y_9^*$ et $y_{10}^* = 2$, et les neuf premières contraintes de (5.41b) sont faiblement actives à la solution x^* qui vérifie la LICQ.

Pour $d \in \mathbb{R}^{10}$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d = 0$, $i \in \mathcal{A}_*^S$ donne $d_{10} = 0$, et $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$, $i \in$

\mathcal{A}_*^W implique que $d_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, 9$. Puisque

$\nabla_{xx}\mathcal{L}(w^*) = 4\text{diag}(5, 10, 100, 5, 20, 5, 10, 35, 95, 70, 20, 10, 35, 10, 30)$ est définie positive, on déduit que

$$d^T \nabla_{xx}\mathcal{L}(w^*)d > 0 \text{ pour tout } d \neq 0,$$

et x^* satisfait la condition suffisante du second ordre pour le problème **s284**.

Le problème sipow1 de la collection (Bongartz *et al.*, 1995; Gould *et al.*, 2003)

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad x_2, \tag{5.42a}$$

$$\text{sujet à} \quad x_1 \cos \frac{2\pi i}{m} + x_2 \sin \frac{2\pi i}{m} + 1 \geq 0 \quad : y_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \tag{5.42b}$$

avec $m = 10^4$. SNOPT trouve le point stationnaire $x_1^* = 2.678232\text{e}-04$ et $x_2^* = -1$ à partir du point initial $x_0 = (.8, .5)$. Les contraintes (5.42b) pour $i = 2491, \dots, 2510$ sont détectées faiblement actives au point x^* par SNOPT et la LICQ est vérifiée en ce point.

Ici on a $\nabla_{xx}\mathcal{L}(w^*) = 0$ et la condition suffisante du second ordre ne peut être satisfaite par x^* .

Le problème sipow1m provient de (Bongartz *et al.*, 1995; Gould *et al.*, 2003),

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad x_2, \tag{5.43a}$$

$$\text{sujet à} \quad x_1 \cos\left(\frac{2\pi i + \pi}{m}\right) + x_2 \sin\left(\frac{2\pi i + \pi}{m}\right) + 1 \geq 0 \quad : y_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \tag{5.43b}$$

avec $m = 10^4$. SNOPT obtient le point stationnaire

$x_1^* = -0.4632679\text{e}-04$ et $x_2^* = -1$, en partant de $x_0 = (.8, .5)$. Les contraintes (5.43b) pour $i = 2490, \dots, 2509$ sont détectées faiblement actives à la solution x^* par SNOPT et la LICQ est satisfaite en ce point.

Pour ce problème, on a $\nabla_{xx}\mathcal{L}(w^*) = 0$ et la condition suffisante du second ordre ne peut être satisfaite par x^* .

Le problème sipow2 de la collection (Bongartz *et al.*, 1995; Gould *et al.*, 2003)

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad x_2, \quad (5.44a)$$

$$\text{sujet à} \quad x_1 \cos \frac{4\pi i}{m} + x_2 \sin \frac{4\pi i}{m} + 1 \geq 0 \quad : y_i, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}, \quad (5.44b)$$

$$x_1 + 1 \geq 0 \quad : y_{M/2+1} \quad (5.44c)$$

avec $M = 10^4$. Pour ce problème, SNOPT obtient le point stationnaire $x_1^* = -0.4632681e-04$ et $x_2^* = -1$, en démarrant du point $x_0 = (.8, .5)$. Les contraintes (5.44b) pour $i = 1245, \dots, 1254$ sont détectées faiblement actives à la solution x^* par SNOPT. Tout comme précédemment la LICQ est satisfaite en ce point.

Pour ce problème, on a $\nabla_{xx}\mathcal{L}(w^*) = 0$ et la condition suffisante du second ordre ne peut être satisfaite par x^* .

Le problème sipow2m provient de (Bongartz *et al.*, 1995; Gould *et al.*, 2003)

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad x_2, \quad (5.45a)$$

$$\text{sujet à} \quad x_1 \cos\left(\frac{4\pi i + 2\pi}{m}\right) + x_2 \sin\left(\frac{4\pi i + 2\pi}{m}\right) + 1 \geq 0 \quad : y_i, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}, \quad (5.45b)$$

$$x_1 + 1 \geq 0 \quad : y_{M/2+1}, \quad (5.45c)$$

avec $M = 10^4$. Ici SNOPT obtient la point stationnaire $x_1^* = -4.6e-04$ et $x_2^* = -1$, en partant du point $x_0 = (.8, .5)$. Les contraintes (5.45b) pour les indices $i = 1245, \dots, 1254$ sont détectées faiblement actives par SNOPT à la solution x^* qui vérifie la LICQ.

Ici, tout comme précédemment, on a $\nabla_{xx}\mathcal{L}(w^*) = 0$ et x^* ne satisfait pas la condition suffisante du second ordre.

Le problème sipow4 de la collection (Bongartz *et al.*, 1995; Gould *et al.*, 2003)

$$\underset{x \in \mathbb{R}^4}{\text{minimiser}} \quad x_4, \quad (5.46a)$$

$$\text{sujet à} \quad x_1 + x_4 + \xi_i x_2 + \eta_i x_3 - \xi_i^2 \eta_i \geq 0 \quad : y_i, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}, \quad (5.46b)$$

$$x_1 + \xi_i x_2 + \eta_i x_3 - \xi_i^2 \eta_i \leq 0 \quad : y_{M/2+i}, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{M}{2} \quad (5.46c)$$

où $M = 10^4$ et les paramètres ξ et η définis par

$$\xi_i = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2i\pi}{M}\right), \quad \eta_i = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2i\pi}{M}\right), \quad i = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}.$$

Pour ce problème SNOPT obtient le point stationnaire $x_1^* = .30097371\text{e}-04$, $x_2^* = 0.856508$, $x_3^* = -0.1296443$ et $x_4^* = 0.2728266$, en partant du point $x_0 = (-.1, 0, 0, 1.2)$. Les contraintes (5.46b) pour $i = 1485, \dots, 1501, 4997, 4998, 4999$ et les contraintes (5.46b) pour $i = 3371, \dots, 3379$ et $i = 3381, \dots, 3385$ sont détectées faiblement actives par SNOPT à la solution x^* qui vérifie la LICQ.

Ici tout comme précédemment, on a $\nabla_{xx}\mathcal{L}(w^*) = 0$ et x^* ne satisfait pas la condition la condition suffisante du second ordre.

Le problème wright-1

est l'Exemple 1 de Wright (2003)

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad \frac{1}{2}[(x_1 + 1)^2 + x_2^2], \quad (5.47a)$$

$$\text{sujet à} \quad x_1 \geq 0 \quad : y_1, \quad (5.47b)$$

$$x_1 + x_2 \geq 0 \quad : y_2, \quad (5.47c)$$

dont la solution est $x_1^* = 0 = x_2^*$ à laquelle correspondent les multiplicateurs de Lagrange $y_1^* = 1$ et $y_2^* = 0$. La contrainte (5.47c) est faiblement active à la solution x^* qui vérifie la LICQ.

Pour $d \in \mathbb{R}^2$, la condition $\nabla c_i(x^*)^T d = 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^S$ donne $d_1 = 0$, et $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$ pour $i \in \mathcal{A}_*^W$ implique que $d_2 + d_1 = d_2 \geq 0$. Par suite, pour tout vecteur $d = (0, d_2)$ avec $d_2 \geq 0$, on obtient

$$d^T \nabla_{xx}\mathcal{L}(w^*)d = [0 \ d_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \end{bmatrix} = d_2^2 > 0 \quad \text{si } d_2 \neq 0,$$

et x satisfait la condition suffisante du second ordre pour le problème **wright-1**.

Le problème **yyelin** provient de (Ye, 2009)

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad \frac{1}{2}[(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2], \quad (5.48a)$$

$$\text{sujet à} \quad 2 - x_1 - x_2 \geq 0 \quad : y_1, \quad (5.48b)$$

$$x_1 - 1 \geq 0 \quad : y_2, \quad (5.48c)$$

a pour solution $x_1^* = 1 = x_2^*$ à laquelle sont associés les multiplicateurs de Lagrange $y_1^* = 0 = y_2^*$. Il s'en suit que toutes les deux contraintes sont faiblement actives à la solution x^* qui satisfait la LICQ.

Ici $\mathcal{A}_*^S = \emptyset$ et avec $d \in \mathbb{R}^2$ tel que $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$, $i \in \mathcal{A}_*^W$, soit $d_1 \geq 0, d_1 + d_2 \leq 0$, on obtient

$$d^T \nabla_{xx} \mathcal{L}(w^*) d = [d_1 \ d_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = d_1^2 + d_2^2 > 0 \quad \text{si } d \neq 0,$$

et x satisfait la condition suffisante du second ordre pour le problème **yyelin**.

5.3.2 Problèmes faiblement actifs irréguliers

Les problèmes de la présente partie ne satisfont ni la condition de la complémentarité stricte ni la LICQ. Pour ces problèmes nous n'avons aucune garantie de l'efficacité de notre stratégie de mise à l'échelle des variables duales faiblement actives sur le taux de convergence locale. Nous ajoutons ces problèmes à la collection par soucis d'exhaustivité et aussi car une généralisation de l'approche du chapitre 4 à des problèmes qui ne satisfont que la MFCQ, s'avère une piste naturelle de développements futurs.

Notons qu'un moyen de générer des problèmes ne satisfaisant pas la LICQ à partir des problèmes de la partie précédente 5.3.1 est de dupliquer par exemple au moins une des contraintes actives à la solution. Nous préférons néanmoins d'autres problèmes avec une structure moins prévisible.

Le problème fer-sol51 est l'exemple 5.1 de Fernandez et Solodov (2010)

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad x_1 x_2 - \frac{1}{2} x_2^2, \quad (5.49a)$$

$$\text{sujet à} \quad -x_2^2 \geq 0 \quad : \quad y_1, \quad (5.49b)$$

$$\quad \quad -2x_1 + x_2 \geq 0 \quad : \quad y_2, \quad (5.49c)$$

$$\quad \quad x_1 - 2x_2 \geq 0 \quad : \quad y_3, \quad (5.49d)$$

qui admet la solution optimale $x_1^* = 0 = x_2^*$, à laquelle sont associés les multiplicateurs de Lagrange $y_1^* = a, a \geq 0$ et $y_2^* = 0 = y_3^*$. Les contraintes (5.49c) et (5.49d) sont faiblement actives à la solution x^* . La LICQ n'est pas vérifiée en x^* , car le gradient de la contrainte (5.49b) active au point x^* est $(0, 0)$. La MFCQ n'est également clairement pas satisfaite en x^* .

Le problème hs108 de la collection Hock et Schittkowski (1981)

$$\underset{x \in \mathbb{R}^9}{\text{minimiser}} \quad -\frac{1}{2}(x_1 x_4 - x_2 x_3 + x_3 x_9 - x_5 x_9 + x_5 x_8 - x_6 x_7), \quad (5.50a)$$

$$\text{sujet à} \quad 1 - x_3^2 - x_4^2 \geq 0 \quad : \quad y_1, \quad (5.50b)$$

$$\quad \quad 1 - x_9^2 \geq 0 \quad : \quad y_2, \quad (5.50c)$$

$$\quad \quad 1 - x_5^2 - x_6^2 \geq 0 \quad : \quad y_3, \quad (5.50d)$$

$$\quad \quad 1 - x_1^2 - (x_2 - x_9)^2 \geq 0 \quad : \quad y_4, \quad (5.50e)$$

$$\quad \quad 1 - (x_1 - x_5)^2 - (x_2 - x_6)^2 \geq 0 \quad : \quad y_5, \quad (5.50f)$$

$$\quad \quad 1 - (x_1 - x_7)^2 - (x_2 - x_8)^2 \geq 0 \quad : \quad y_6, \quad (5.50g)$$

$$\quad \quad 1 - (x_3 - x_7)^2 - (x_4 - x_8)^2 \geq 0 \quad : \quad y_7, \quad (5.50h)$$

$$\quad \quad 1 - (x_3 - x_5)^2 - (x_4 - x_6)^2 \geq 0 \quad : \quad y_8, \quad (5.50i)$$

$$\quad \quad 1 - x_7^2 - (x_8 - x_9)^2 \geq 0 \quad : \quad y_9, \quad (5.50j)$$

$$\quad \quad x_1 x_4 - x_2 x_3 \geq 0 \quad : \quad y_{10}, \quad (5.50k)$$

$$\quad \quad x_3 x_9 \geq 0 \quad : \quad y_{11}, \quad (5.50l)$$

$$\quad \quad -x_5 x_9 \geq 0 \quad : \quad y_{12}, \quad (5.50m)$$

$$\quad \quad x_5 x_8 - x_6 x_7 \geq 0 \quad : \quad y_{13}, \quad (5.50n)$$

$$\quad \quad x_9 \geq 0 \quad : \quad y_{14}, \quad (5.50o)$$

a pour solution $x_1^* = 0.8841292 = x_5^*, x_2^* = 0.4672425 = x_6^*, x_3^* = 0.03742076 = x_7^*, x_4^* = 0.9992996 = x_8^*$ et $x_9^* = 0$ et les contraintes actives en ce point sont (5.50b), (5.50d), (5.50e), (5.50g), (5.50i)–(5.50j), (5.50l), (5.50m) et (5.50e). Les gradients de la contrainte (5.50e) au point x^* est $e_9 = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^9$ et ceux des contraintes (5.50l) et (5.50m) sont respectivement $x_3 e_9 = 0.03742076 e_9$ et $-x_5 e_9 = -0.8841292 e_9$. Il s'en suit que x^* ne vérifie ni la LICQ ni la MFCQ.

Pour ce problème, SNOPT trouve le point stationnaire $x_1^* = .87 = x_3^* = x_5^* = x_7^*, x_2^* = -.5 = -x_4^* = x_6^* = -x_8^*, x_9 = 0$, avec la même valeur de l'objectif $f(x^*) = -.8660254038$, que la solution (officielle) précédente. En cette nouvelle solution qui ne vérifie pas la LICQ, les trois contraintes (5.50l), (5.50m) et (5.50o) sont faiblement actives.

Le problème mcwit-81

est l'exemple 8.1 de McCormick et Witzgall (2001)

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad x_2, \quad (5.51a)$$

$$\text{sujet à} \quad x_1 \geq 0 \quad : \quad y_1, \quad (5.51b)$$

$$-x_1^2 + x_2 \geq 0 \quad : \quad y_2, \quad (5.51c)$$

$$x_2 \geq 0 \quad : \quad y_3, \quad (5.51d)$$

dont la solution optimale est $x_1^* = 0 = x_2^*$ et les multiplicateurs correspondants sont $\Lambda(x^*) = \{(0, \alpha, 1 - \alpha) \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$. Donc la contrainte (5.51b) est toujours faiblement active à la solution x^* . Puisque les contraintes (5.51c) et (5.51d) actives au point x^* ont le même gradient $(0, 1)$, il en découle que la LICQ n'est pas satisfaite par x^* . Par contre x^* vérifie la MFCQ.

Le problème noc-wright112

s'inspire de l'exemple 11.2 de Nocedal et Wright (2006) auquel nous avons ajouté un objectif quadratique

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad x_1^2 + x_2^2, \quad (5.52a)$$

$$\text{sujet à} \quad x_1 \geq 0 \quad : \quad y_1, \quad (5.52b)$$

$$\frac{100x_1}{1 + 10x_1} + x_2^2 \geq 0 \quad : \quad y_2. \quad (5.52c)$$

La solution optimale est $x^* = (0, 0)$ à laquelle sont associés les multiplicateurs $y_1^* = 0 = y_2^*$. Les deux contraintes sont faiblement actives en x^* qui ne vérifie pas la LICQ. La MFCQ est

satisfaite en x^* , car les gradients de ces contraintes au point x^* sont respectivement $(1, 0)$ et $(100, 0)$.

Le problème wright-61 est l'exemple 6.1 de Wright (2003)

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad x_1, \tag{5.53a}$$

$$\text{sujet à} \quad 4 - (x_1 - 2)^2 - x_2^2 \geq 0 \quad : \quad y_1, \tag{5.53b}$$

$$16 - (x_1 - 4)^2 - x_2^2 \geq 0 \quad : \quad y_2, \tag{5.53c}$$

$$4 - x_1^2 - (x_2 - 2)^2 \geq 0 \quad : \quad y_3, \tag{5.53d}$$

dont la solution est $x_1^* = 0 = x_2^*$ et les multiplicateurs de Lagrange correspondants sont $y_1^* = \frac{1}{4} - 2\alpha$, $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{8}$, $y_2^* = \alpha$, $y_3^* = 0$. La contrainte (5.53d) est faiblement active au point x^* . Toutes les trois contraintes (5.53b)–(5.53d) sont actives au point x^* qui ne satisfait donc pas la LICQ, mais vérifie la MFCQ.

Le problème yyelin2 provient de (Ye, 2009)

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimiser}} \quad \frac{1}{2}[(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2], \tag{5.54a}$$

$$\text{sujet à} \quad (2 - x_1 - x_2)^3 \geq 0 \quad : \quad y_1, \tag{5.54b}$$

$$x_1 - 1 \geq 0 \quad : \quad y_2, \tag{5.54c}$$

a la même solution optimale que le problème **yyelin** $x_1^* = 1 = x_2^*$. Les deux contraintes (5.54b)–(5.54c) sont actives à la solution x^* , à laquelle sont associés les multiplicateurs de Lagrange $y_1^* \geq 0$ et $y_2^* = 0$. La contrainte (5.54c) est faiblement active au point x^* qui ne satisfait ni la LICQ ni la MFCQ. En effet le gradient de la contrainte (5.54b) active au point x^* est nul.

5.4 Performance des solveurs sur les problèmes faiblement actifs

Dans cette section nous répertorions les résultats numériques obtenus par les solveurs IPOPT2, IPOPT2nsc, KNITRO, LOQO et SNOPT sur la collection de problèmes faiblement actifs précédemment décrits. Pour chaque solveur on trouve dans la deuxième ligne du

tableau 5.2 le nombre de contraintes faiblement actives détectées tandis que les colonnes trois et quatre donnent respectivement le nombre d'itérations et la valeur de l'objectif.

Tableau 5.2 – Récapitulatif des résultats des tests numériques

Problèmes Réguliers					
Solveurs	IPOPT2	IPOPT2 _{nsc}	KNITRO	LOQO	SNOPT
Problème biggsc4					
# nsc	1	1	0	0	2
# iterations	26	20	19	21	20
objectif	-0.24500E+02	-0.24500E+02	-0.24499E+02	-0.24499E+02	-0.30000E+01
Problème fac-33					
# nsc	0	0	0	0	2
# iterations	12	13	11	22	0
objectif	0.413872E-08	0.223554E-08	0.960902E-06	0.144373E-08	0.0E+00
Problème fac-42					
# nsc	0	0	0	0	1
# iterations	24	23	25	26	61
objectif	0.28540E-08	0.28527E-08	0.22003E-06	0.37514E-08	0.21222E-07
Problème fiacmc-52					
# nsc	0	0	0	0	1
# iterations	13	8	9	22	9
objectif	-0.93188E-08	-0.36598E-08	0.299991E-05	0.651706E-08	0.00000E+00
Problème forgrw					
# nsc	0	0	0	0	1
# iterations	13	6	15	21	0
objectif	0.39999E+01	0.39999E+01	0.40000E+01	0.39999E+01	0.40000E+01
Problème henk					
# nsc	0	0	0	0	1
# iterations	13	6	12	24	0
objectif	-0.48141E-08	-0.35165E-08	0.81417E-06	0.69750E-08	0.00000E+00
Problème hs017					
# nsc	0	0	0	0	1
# iterations	20	16	15	33	13
objectif	0.10000E+01	0.10000E+01	0.10003E+01	0.10000E+01	0.10000E+01
Problème hs21mod					
# nsc	0	0	0	0	2
# iterations	16	11	13	23	2
objectif	-0.95960E+02	-0.95960E+02	-0.95959E+02	-0.95959E+02	-0.95960E+02
Problème hs032					
# nsc	0	0	0	0	1
# iterations	16	11	7	23	5
objectif	0.99999E+00	0.99999E+00	0.10000E+01	0.10000E+01	0.10000E+01

Tableau 5.2 – Récapitulatif des résultats des tests numériques (suite)

Problème hs35mod					
# nsc	0	0	0	0	1
# iterations	15	7	10	21	1
objectif	0.25000E+00	0.25000E+00	0.25000E+00	0.25000E+00	0.25000E+00
Problème izm-sol49					
# nsc	0	0	0	0	2
# iterations	13	6	11	23	0
objectif	0.46810E−08	0.22239E−08	0.41186E−06	0.84343E−08	0.00000E+00
Problème izm-sol-421					
# nsc	0	0	0	0	2
# iterations	13	8	11	24	0
objectif	0.33370E−08	0.43915E−08	0.41186E−06	0.84343E−08	0.00000E+00
Problème jitt-osb					
# nsc	0	0	0	0	0
# iterations	10000	10000	239	10000	211
objectif	−0.22088E+10	−0.22088E+10	−0.74910E+08	NAN	−0.30513E+04
Problème mcwit-32					
# nsc	0	0	0	0	1
# iterations	12	5	10	22	0
objectif	0.21350E−08	0.23307E−08	0.4120446E−06	0.113461E−07	0.000000E+00
Problème mcwit-33b					
# nsc	0	0	0	0	1
# iterations	15	10	10	22	0
objectif	−0.93187E−08	−0.36598E−08	0.29999E−05	0.23424E−08	0.00000E+00
Problème mcwit-34					
# nsc	0	0	0	0	2
# iterations	16	34	9	25	0
objectif	0.21130E−08	0.22706E−08	0.24050E−05	0.22037E−08	0.00000E+00
Problème noc-wright11					
# nsc	0	0	0	0	2
# iterations	16	11	11	26	5
objectif	0.29619E−08	0.42261E−08	0.50030E−05	0.22623E−07	0.61629E−31
Problème noc-wright127					
# nsc	0	0	0	0	1
# iterations	13	9	10	22	0
objectif	−0.43186E−08	0.13397E−08	0.30540E−05	0.58267E−08	0.00000E+00

Tableau 5.2 – Récapitulatif des résultats des tests numériques (suite)

Problème noc-wright165					
# nsc	0	0	0	0	2
# iterations	14	6	11	23	1
objectif	0.50387E−08	0.10309E−08	0.82560E−06	0.48154E−08	0.00000E+00
Problème noc-wright222					
# nsc	0	0	0	0	2
# iterations	16	10	16	29	17
objective	0.21307E−08	0.42265E−08	0.88286E−05	0.74170E−09	0.17590E−19
Problème noc-wright43					
# nsc	0	0	100	100	
# iterations	19	12	19	34	
objectif	0.21657E−06	0.21132E−06	0.15520E−03	0.69903E−09	0.17474E−11
Problème nonscomp					
# nsc	0	0	0	3327	3328
# iterations	23	15	60	33	12028
objectif	0.45527E−05	0.20523E−04	0.15633E−02	0.24094E−08	0.35040E−11
Problème nsc					
# nsc	0	0	1	0	1
# iterations	12	5	17	23	0
objectif	0.28086E−08	0.32502E−08	0.50000E−16	0.13234E−07	0.00000E+00
Problème nsc2D					
# nsc	0	0	0	0	1
# iterations	13	6	11	16	0
objectif	0.49999E+00	0.49999E+00	0.50000E+00	0.50000E+00	0.50000E+00
Problème nsc2Dcarl					
# nsc	0	0	0	0	1
# iterations	13	6	12	22	1
objectif	0.22499E+01	0.22499E+01	0.22500E+01	0.22500E+01	0.22500E+01
Problème nsc2Dnl					
# nsc	0	0	0		2
# iterations	12	5	12	23	0
objectif	0.20000E+01	0.20000E+01	0.20000E+01	0.50000E+00	0.00000E+00
Problème nsc2Dzc					
# nsc	0	0	0	0	2
# iterations	15	10	11	23	5
objectif	0.32662E−08	0.42261E−08	0.82851E−06	0.17682E−07	0.61629E−32

Tableau 5.2 – Récapitulatif des résultats des tests numériques (suite)

Problème nscgene					
# nsc	0	0	0	1000	1000
# iterations	12	5	10	34	0
objectif	0.28086E−05	0.32502E−05	0.24767E−02	0.14092E−07	0.00000E+00
Problème nscgene2					
# nsc	0	0	50	1000	1000
# iterations	15	7	33	42	0
objectif	0.24685E−05	0.28896E−05	0.03082E−01	0.15419E−07	−0.59604E−07
Problème oslbqp					
# nsc	0	0	0	0	5
# iterations	14	6	8	27	6
objectif	0.62499E+01	0.624996E+01	0.62500E+01	0.62500E+01	0.62500E+01
Problème pentdi					
# nsc	0	0	496	0	496
# iterations	15	10	3	20	2
objectif	−.75000E+00	−.75000E+00	−.75000E+00	−0.74999E+00	−.75000E+00
Problème s234					
# nsc	0	0	0	0	1
# iterations	17	15	12	22	0
objectif	−0.80000E+00	−0.80000E+00	−0.79999E+00	−0.79999E+00	−0.80000E+00
Problème s242					
# nsc	0	0	0	0	1
# iterations	21	22	22	25	22
objectif	0.34760E−09	0.22915E−09	0.51328E−06	0.12506E−08	0.68762E−14
Problème s244					
# nsc	0	0	0	0	1
# iterations	16	16	13	21	23
objectif	0.34243E−08	0.89469E−09	0.16862E−05	0.19469E−06	0.77825E−14
Problème s268					
# nsc	0	0	0	0	1
# iterations	16	16	8	27	6
objectif	0.66059E−06	0.66059E−06	0.17600E−02	0.65343E−08	−0.36379E−11
Problème s270					
# nsc	0	0	0	0	5
# iterations	25	27	22	14	18
objectif	0.42037E−08	0.30375E−09	0.63357E−06	0.63096E−11	−0.10000E+01

Tableau 5.2 – Récapitulatif des résultats des tests numériques (suite et fin)

Problème s284					
# nsc	0	0	0	0	9
# iterations	27	28	12	28	234
objectif	-0.18400E+04	-0.18400E+04	-0.18399E+04	-0.18399E+04	-0.18400E+04
Problème wright-1					
# nsc	0	0	0	0	1
# iterations	14	6	11	24	0
objectif	0.49999E+00	0.49999E+00	0.50000E+00	0.50000E+00	0.50000E+00
Problème yyelin					
# nsc	0	0	0	0	2
# iterations	15	7	11	26	1
objectif	0.34265E-08	0.68871E-08	0.83660E-06	0.14556E-07	0.00000E+00
Problèmes irréguliers					
Problème fer-sol51					
# nsc	0	0	0	0	3
# iterations	24	23	12	30	0
objectif	0.18953E-08	0.18953E-08	0.83485E-08	0.12410E-10	0.00000E+00
Problème hs108					
# nsc	0	0	0	0	3
# iterations	15	15	12	20	1
objectif	-0.67498E+00	-0.50000E+00	-0.67498E+00	-0.86602E+00	-0.86602E+00
Problème mcwit-81					
# nsc	0	0	0	0	2
# iterations	15	18	10	24	0
objectif	-0.88635E-08	-0.88637E-08	0.38267E-05	0.16623E-08	0.00000E+00
Problème noc-wright112					
# nsc	0	0	0	0	2
# iterations	24	22	19	20	0
objectif	0.42257E-08	0.42323E-09	0.86301E-05	0.79922E-08	0.00000E+00
Problème wright-61					
# nsc	0	0	0	0	2
# iterations	18	17	12	20	0
objectif	-0.92930E-08	-0.19412E-08	0.99978E-06	0.41421E-08	0.00000E+00
Problème yyelin2					
# nsc	0	0	0	1	0
# iterations	34	33	29	36	1
objectif	0.13649E-08	0.21115E-08	0.17642E-09	0.99571E-15	0.11589E+00

Il est intéressant d'observer que pour le problème **nonscomp**, tous les solveurs de points intérieurs effectuent moins d'itérations que SNOPT. Comme dans la plupart des problèmes de

cette section, IPOPT2nsc fait mieux que tous les autres solveurs de points intérieurs. Observons ici que la mise à l'échelle des multiplicateurs ne semble pas améliorer les performances d'IPOPT sur les problèmes **s234**, **242**, **s244**, **s279** et **s270** de la collection Schittkowski (1987). Ce comportement est tout à fait cohérent avec la théorie de notre approche de mise à l'échelle qui ne fonctionne qu'en vertu de la LICQ et de la condition forte du second ordre. En fait, pour tous les problèmes, précités le point stationnaire obtenu ne satisfait pas la condition du second ordre. En effet, la matrice hessienne du lagrangien au point stationnaire est nulle pour les problèmes **s234** et **s270**. Pour les problèmes **s234**, **s244** et **s279**, cette matrice hessienne n'est pas définie positive sur l'ensemble des directions $d \neq 0$ qui vérifient $\nabla c_i(x^*)^T d = 0$, pour tout $i \in \mathcal{A}_*^S$ et $\nabla c_i(x^*)^T d \geq 0$ pour tout $i \in \mathcal{A}_*^W$. Il en est de même pour les problèmes **fac-42**, **noc-wright222** et **noc-wright43**.

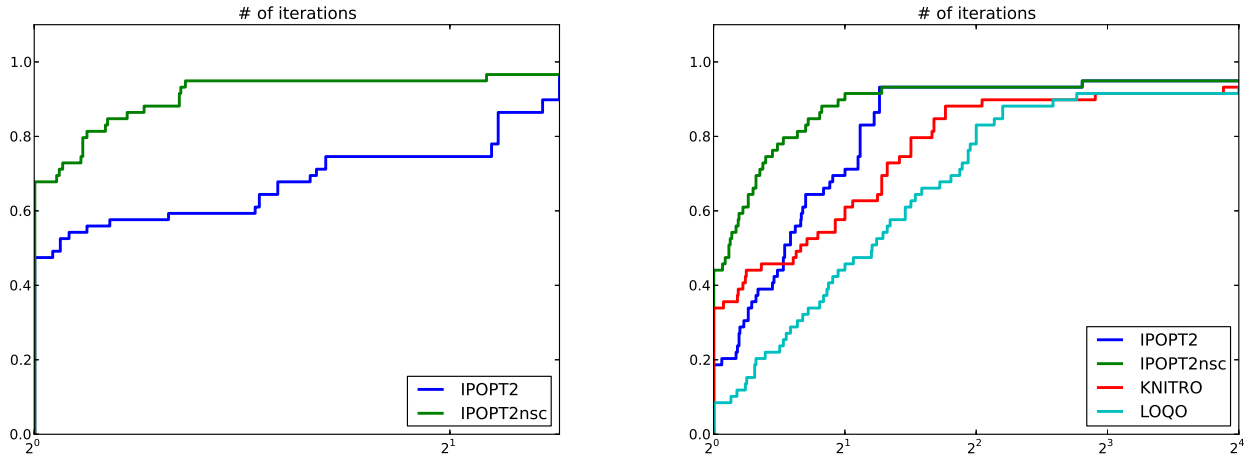


Figure 5.1 Profils de performance pour KNITRO, IPOPT2, IPOPT2nsc et LOQO pour le nombre d'itérations.

La figure 5.1 donne les profils de performance pour le nombre d'itérations des différents solveurs. Sur le graphique de gauche qui donne les profils pour IPOPT2 et IPOPT2nsc, on peut observer qu'IPOPT2 est le plus rapide sur près de 65 % des problèmes et qu'il atteint un taux de succès d'environ 98 % en dominant IPOPT2 en tout temps. Cette observation est confirmée par le graphique de droite où le profil de IPOPT2nsc est au dessus de celui de tous les autres solveurs. Ceci tend à confirmer l'efficacité de la mise à jour duale sur cette collection de problèmes avec des contraintes faiblement actives.

5.5 Résultats numériques sur des problèmes de la collection CUTE(r)

Cette section résume les performances comparées des solveurs IPOPT2, IPOPT2nsc, KNITRO et LOQO sur des problèmes faiblement actifs supplémentaires de la collection Bongartz

et al. (1995); Gould *et al.* (2003). La plupart de ces problèmes ont été détectés numériquement par SNOPT. Nous répertorions dans le tableau 5.3, aux colonnes 3 à 6, le nombre de contraintes faiblement actives détectées par chaque solveur, et ce pour le problème correspondant, dans la ligne concernée. Les colonnes 7 à 10 renferment le nombre d'itérations pour chaque solveur. Les colonnes 1 et 2 contiennent respectivement le nom et la classification du problème, telle que décrite dans Bongartz *et al.* (1995); Gould *et al.* (2003). Le seuil d'erreur ici, comme dans les tests antérieurs, est fixé à $\varepsilon = 10^{-5}$ pour tous les solveurs et le nombre maximal d'itérations permis est fixé à 10000. Dans chaque rangée du tableau 5.3, le nombre en caractère gras souligne le nombre minimal d'itérations, parmi tous les solveurs.

Tableau 5.3 Comparaison entre IPOPT2, KNITRO et LOQO sur des problèmes faiblement actifs de la collection CUTE(r)

Problèmes	Classification	Contrainte				Itérations			
		IPOPT3	KNITRO	LOQO	SNOPT	IPOPT2	IPOPT2 _{nsc}	LOQO	KNITRO
aug2dqp	QLR2-AN-V-V	208	208	208	-	30	22	28	28
bigbank	ONI2-RN-2230-1112	392	469	323	463	25	19	31	1324
blockqp1	QLR2-AN-V-V	0	0	0	502	11	8	18	6
blockqp5	QLR2-AN-V-V	22	0	0	295	43	24	34	8
brainpc0	SOR2-MY-6907-6900	7	2	0	96	i	<i>194</i>	i	75
brainpc4	SOR2-MY-6907-6900	2	7	0	112	84	137	i	<i>33</i>
brainpc8	SOR2-MY-6907-6900	2	7	14	116	82	75	i	41
chnlbeam	OOR2-MN-V-V	4	4	4	4	176	183	110	355
deconvb	SBR2-MN-61-0	0	0	0	2	6952	1099	41	59
deconvc	SQR2-MN-61-1	0	0	0	1	58	59	32	44
eigena	NOR2-AN-V-V	0	0	0	90	29	25	24	38
gausselm	LOR2-AN-V-V	1	1	20	2720	987	933	i	103
ksip	QLR2-AN-20-1001	0	0	11	12	29	32	50	14
liswet5	QLR2-AN-V-V	0	0	7	276	38	35	35	24
pentdi	QBR2-AN-V-0	0	0	0	496	15	10	20	11
reading2	LLR2-MN-V-V	0	0	3195	5628	17	17	24	1
sipow1	LLR2-AN-2-V	0	0	16	18	20	20	17	135
sipow1m	LLR2-AN-2-V	0	0	14	18	20	18	16	133
sipow2	LLR2-AN-2-V	0	0	6	8	23	25	16	12
sipow2m	LLR2-AN-2-V	0	0	6	8	23	20	16	12
sipow4	LLR2-AN-4-V	0	0	23	33	16	17	19	22
smmpsfs	LQR2-AY-720-263	12	11	11	12	107	107	i	100
steenbra	QNR2-AY-432-108	0	0	0	51	23	30	22	191
steenbrc	ONR2-MY-540-126	0	0	0	416	759	923	f	273
steenbre	ONR2-MY-540-126	0	0	0	84	124	91	314	956
steenbrg	ONR2-MY-540-126	0	0	0	79	73	85	175	1156
trainf	QQR2-MN-V-V	36	8	641	645	40	33	72	77
vanderm1	NOR2-AN-V-V	0	0	0	52	32	26	i	32

LOQO atteint le nombre limite d'itérations sans obtenir une solution sur les problèmes **brainpc0**, **brainpc4**, **brainpc8**, **smmpsfs** et **vanderm1**. Il en de même pour IPOPT2_{nsc} sur le problème **brainpc0**. Ceci est indiqué dans le tableau 5.3 par la lettre « i ». Le problème **steenbrc** engendre une erreur d'admissibilité pour LOQO (marqué par « f » dans le tableau 5.3). Le nombre d'itérations en italique pour KNITRO sur le problème **brainpc4**

indique qu'une erreur de « NaN » survient dans l'évaluation de l'objectif.

Notons aussi que la hessienne du lagrangien est nulle pour les problèmes **sipow1**, **sipow1m**, **sipow2**, **sipow2m** et **sipow4**. La condition suffisante du second ordre n'est donc pas satisfaite par les points stationnaires et par conséquent, notre approche d'accélération de la convergence n'a pas d'effet sur ces problèmes. On observe que sur la plupart des pro-

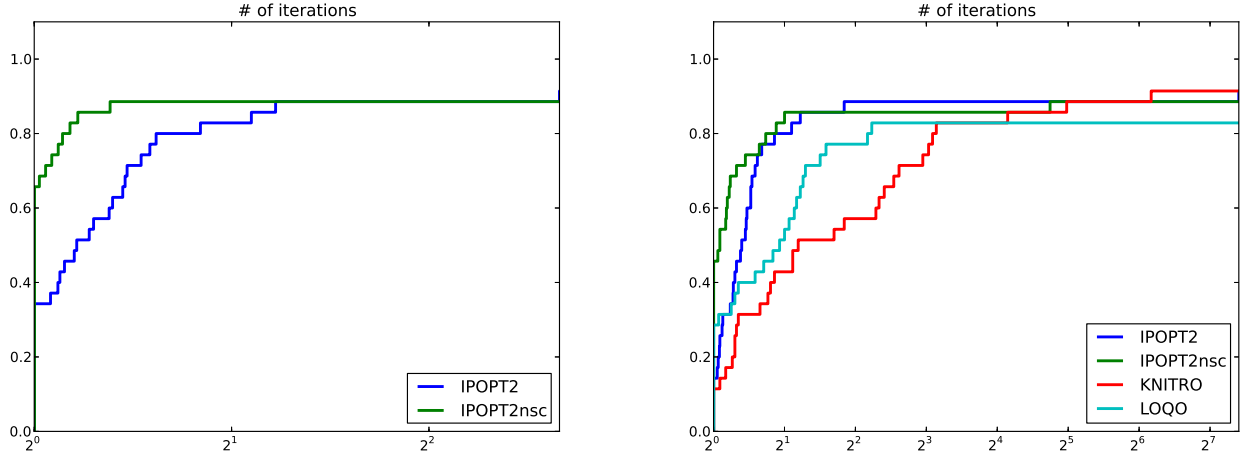


Figure 5.2 Profils de performance pour KNITRO, IPOPT2, IPOPT2nsc et LOQO pour le nombre d'itérations.

blèmes du tableau 5.3, IPOPT2nsc effectue moins d'itérations que IPOPT2. Les profils de performance de la figure 5.2 confirment les bonnes performances de IPOPT2nsc sur ces problèmes. Le profil du graphique de gauche montre une nette prépondérance de IPOPT2nsc sur IPOPT, aussi bien en termes de vitesse, il est plus rapide sur près de 60 % des problèmes, q'en termes de robustesse, où il atteint un taux de succès de près de 90 %. Sur le graphique de droite qui donne les profils pour tous les solveurs, on observe aussi la bonne performance de IPOPT2nsc qui demeure la plus rapide sur 60 % des problèmes et qui obtient le deuxième taux de succès après KNITRO. Cela tend à confirmer l'efficacité de la technique de mise à l'échelle de Coulibaly et Orban (2012) pour accélérer la convergence locale des méthodes de points intérieurs sur les problèmes non strictement complémentaires.

5.6 Conclusion

En conclusion, on peut retenir que IPOPT2nsc surpasse sur la plupart des problèmes IPOPT2 et LOQO et se place deuxième dans les autres cas où KNITRO obtient le plus petit nombre d'itérations. Mentionnons également que la stratégie de mise à jour des variables duales de Coulibaly et Orban (2012) testée ici est de faible coût car elle n'exige aucun calcul supplémentaire. En plus elle ne dépend pas de la taille du problème. Pour les points sta-

tionnaires où la LICQ et la condition forte du second ordre sont satisfaites, on observe la convergence superlinéaire de la suite d'itérés produite par IPOPT.

Malgré ce bon comportement numérique pour une implementation préliminaire, il serait intéressant de rendre l'implementation plus robuste en incorporant le système réduit dans le calcul du pas de Newton. Relaxer les hypothèses de la LICQ et/ou de la condition suffisante du second ordre pourrait être des axes de développements futurs afin de prendre en compte un plus grand nombre de problèmes avec des contraintes faiblement actives.

CHAPITRE 6

CONCLUSION

6.1 Synthèse des travaux

Nous avons présenté dans le chapitre 3 une approche générale pour la résolution des problèmes non linéaires à l'aide de la méthode des variables élastiques.

Du fait que l'intérieur strict de l'ensemble réalisable d'un problème avec contraintes de complémentarité est vide, aucune condition de qualification n'est satisfaite. On ne peut donc pas songer à résoudre ces problèmes par les méthodes d'optimisation continue efficaces que sont les points intérieurs, qui constituent l'état de l'art à ce jour. Par ailleurs les problèmes avec contraintes de complémentarité possèdent leur propres jeux de conditions d'optimalité qui diffèrent des conditions d'optimalité classiques. Une fois les contraintes reformulées, les précédentes approches consistaient à élargir l'ensemble réalisable de manière empirique et à résoudre le problème ainsi obtenu par un procédé classique. Les propriétés de convergence des algorithmes qui découlent de ce type d'approche dépendent inéluctablement du choix du paramètre de relaxation. Un désavantage majeur de cette approche à nos yeux est qu'elle demande à l'utilisateur de savoir par avance l'emplacement des contraintes de complémentarité, la relaxation ne concernant que celles-ci. C'est comme si la méthode possédait un mode « complémentaire », activé lorsque de telles contraintes sont présentes. Nous cherchions donc une méthode générique qui ne demande pas à l'utilisateur de gérer l'élargissement manuellement. Dans notre approche le rôle du paramètre d'élargissement est joué par de nouvelles variables du problème. Une méthode de points intérieurs ℓ_1 est ensuite appliquée au problème résultant. L'objectif du problème est rendu différentiable par introduction de variables élastiques. Le problème élastique ainsi formé ne comporte plus que des contraintes d'inégalité et l'intérieur strict de son ensemble réalisable est désormais non vide. On peut donc le résoudre par la méthode des points intérieurs. Cette approche initialement suggérée par Gould *et al.* (2010) dans le cas des problèmes continus généraux, s'avère indiquée dans notre contexte, aussi bien pour sa performance numérique que sa généralité. L'approche élastique est en effet applicable au-delà des problèmes avec contraintes de complémentarité, par définition—toutes les contraintes sont relâchées indépendamment du fait qu'elles décrivent des conditions de complémentarité. Comme conséquences, nous n'avons aucun « mode complémentaire », d'une part, et d'autre part, notre approche permet de résoudre tout problème dont l'ensemble réalisable est d'intérieur strict vide.

Dans le chapitre 4 nous avons décrit une approche de mise à l'échelle des multiplicateurs faiblement actifs afin de recouvrer une convergence locale superlinéaire pour un algorithme de points intérieurs primal-dual, en l'absence de la complémentarité stricte. En effet, en une solution locale non strictement complémentaire, la direction d'approche des solutions du problème barrière est tangente à certaines contraintes actives. De plus la matrice du système de Newton est singulière à la solution. Cela détériore les bonnes propriétés de convergence rapide de la méthode de Newton. Dans ce chapitre, en nous basant sur une approche de mise à l'échelle peu onéreuse, nous proposons une décomposition du système de Newton réduit selon les ensembles actifs qui donne à la limite une matrice régulière, sous les conditions classiques de la LICQ et de la condition suffisante du second ordre. Le chapitre 4 renferme les propriétés théoriques de notre approche de mise à l'échelle des variables duales ainsi que la convergence superlinéaire de la suite d'itérés ainsi construite. Numériquement, l'approche de mise à l'échelle a été incorporée à la version Fortran de IPOPT et nous a permis d'observer la convergence superlinéaire sur un certains nombre de problèmes. Les détails de ces tests numériques se trouvent dans le chapitre 5.

Dans le chapitre 5, nous avons livré les détails des tests numériques dans lesquels nous comparons notre approche de mise à l'échelle dans IPOPT avec KNITRO et LOQO, deux autres solveurs de points intérieurs. Pour les besoins de ces tests, nous avons initié l'assemblage d'une collection de problèmes faiblement actifs issus de collections déjà existantes et de la littérature. Pour la détection des contraintes faiblement actives, nous avons utilisé un code AMPL avec le solveur KNITRO qui utilise un algorithme SQP et une méthode de contraintes actives. Dans le chapitre 5, en plus des détails de la performance des trois solveurs de notre étude, nous donnons quelques caractéristiques analytiques pour la plupart des problèmes, notamment une solution locale ainsi que la condition de qualification satisfaite en cette solution. Ces tests numériques donnent un éclairage conséquent sur l'efficacité de notre approche d'accélération de la vitesse de convergence locale des algorithmes de points intérieurs primaux-duaux exposée au chapitre 4.

6.2 Limitations des solutions proposées

Nonobstant le taux de réussite satisfaisant de nos deux approches pour résoudre les problèmes avec des contraintes de complémentarité et le manque de la complémentarité stricte, on peut relever les limitations suivantes qui sont autant de pistes d'améliorations futures.

À propos des problèmes avec des contraintes de complémentarité, notre approche de résolution s'avère adaptée à tout type de problèmes complémentaires, sans considération quant à la régularité. Cependant, même si dans nos test numériques sur la liste de problèmes

MacMPEC, nous n'avons pas rencontré de problème de convergence locale lente, nous pensons qu'il est possible d'améliorer la vitesse de la convergence locale. Nos résultats numériques décrivent un ordre de convergence locale linéaire, cohérent avec la règle de mise à jour linéaire du paramètre barrière. Par ailleurs, la formulation avec des égalités peut conduire à des points faiblement stationnaires tels que des points C-stationnaires. En effet les multiplicateurs de Lagrange associés au point fortement stationnaire du théorème 3.2.1 sont $z_1 = y_1 - X_2(y_3 - \nu e)$ et $z_2 = y_2 - X_2(y_3 - \nu e)$. À cause du terme de décalage νe , l'algorithme peut être coincé en un point C-stationnaire. La formulation avec des inégalités semble plus robuste de ce point de vue, car capable d'éviter ce type de points. Dans la situation où l'algorithme converge vers un point qui ne satisfait pas la MPCC-MFCQ, nous disposons de la relation liant les gradients des contraintes actives et des contraintes d'égalité, comme on peut le voir dans la preuve du théorème 3.4.3. En d'autres termes, on pourrait à partir de cette relation éliminer certaines contraintes redondantes et obtenir un problème plus régulier que l'on passe à l'algorithme élastique.

Concernant l'accélération de la convergence pour des problèmes non strictement complémentaires, nous ne solutionnons que des problèmes où la LICQ est satisfaite à la solution. Cette hypothèse laisse hors de portée de notre approche tous les problèmes où des conditions de qualification plus faibles, telles que la SMFCQ, ou la MFCQ sont satisfaites, et aussi tous les problèmes où aucune condition de qualification n'est satisfaite.

Notre collection de problèmes faiblement actifs n'en est qu'à ses balbutiements et il ne fait aucun doute, compte tenu de nos ressources et de nos intérêts du moment, que nous avons été limités quant au nombre et à la variété des problèmes qui y sont mentionnés.

6.3 Améliorations futures

À la lumière de cette thèse qui a pour objet le traitement de dégénérescence en optimisation linéaire, et nonobstant les résultats satisfaisants auxquels nous sommes parvenus, il demeure des pistes d'amélioration à explorer, dans le but d'affiner ou d'étendre ces résultats.

Dans le cas des problèmes de complémentarité, une piste de réflexion immédiate est de peaufiner le choix des paramètres de pénalité afin de les ajuster au fur et à mesure du déroulement des itérations internes. Il serait tout aussi intéressant d'étudier et de renforcer le mécanisme de l'algorithme élastique, avec la formulation avec des inégalités, qui nous permet d'éviter les points C-stationnaires, ces faux optima, et le cas échéant de le renforcer. Par ailleurs, même si en pratique nous n'avons constaté aucun cas de convergence locale anormalement long, il serait bon d'étudier plus en détail la vitesse de convergence locale de l'algorithme élastique afin de l'améliorer à l'image de ce qui a été fait pour les problèmes avec

des contraintes faiblement actives au chapitre 4.

Une piste d'investigation prometteuse pour l'algorithme élastique pourrait être la résolution de problèmes non linéaires mixtes (MINLPs) dans lesquelles on rencontre des variables binaires (ou entières) à coté des variables continues. En réécrivant les variables binaires $b_i \in \{0, 1\}$ comme des variables continues sous l'une des formes $b_i(1 - b_i) = 0$ ou $0 \leq b_i \leq 1$ et $b_i(1 - b_i) \leq 0$, on introduit des contraintes de complémentarité. Les résultats préliminaires que nous obtenons sur des instances de problèmes en nombres entiers simples, en une ou deux dimensions nous pensent qu'une piste de développement futur intéressant serait d'utiliser une approche élastique dans la résolution de MINLPs.

À propos du manque de la complémentarité stricte, une fois lancés dans l'étude de l'accélération de la convergence des méthodes de points intérieurs, nous nous sommes aperçus du manque de résultats concernant l'existence de la trajectoire centrale, pour le cas de problèmes non linéaires le plus général. Une piste de recherche naturelle est de s'attaquer à l'existence de la trajectoire centrale pour les problèmes faiblement complémentaires et qui satisfont la LICQ, en s'inspirant des travaux de Stoer et Wechs (1998), par exemple. Une autre piste d'amélioration de notre approche est de relaxer l'hypothèse de la LICQ, en la remplaçant par une plus faible condition de qualification telle que la MFCQ et de voir dans quelle mesure les résultats actuels s'en trouvent modifiés.

Enfin, l'étape suivante pour la collection de problèmes faiblement actifs est de l'étoffer avec un plus grand nombre de problèmes issus de divers horizons et cela en rendant la collection plus visible et accessible en ligne, afin de stimuler grandement l'interactivité et la collaboration entre de potentiels usagers.

Il pourrait être aussi intéressant de combiner l'approche élastique avec la technique de mise à l'échelle des multiplicateurs associées aux contraintes faiblement actives. Cette unification des deux approches aura pour avantage de nous dispenser de la condition de qualification, vu qu'on en recouvre une avec formulation élastique. L'autre avantage théorique de cette approche est qu'on n'a plus besoin de formuler d'hypothèse de complémentarité stricte sur le problème élastique résultant. Cela pourra donc permettre de bâtir la théorie de la convergence locale pour l'algorithme élastique, qui comme on l'a vu au chapitre 4 se bute à la très exigeante condition d'avoir une solution du (MPCC) strictement complémentaire de niveau inférieure, c'est à dire $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$.

LISTE DES RÉFÉRENCES

- ANITESCU, M. (2005). On using the elastic mode in nonlinear programming approaches to mathematical programs with complementarity constraints. *SIAM Journal on Optimization*, 15, 1203–1236.
- ANITESCU, M., TSENG, P. et WRIGHT, S. J. (2007). Elastic-mode algorithms for mathematical programs with equilibrium constraints : global convergence and stationarity properties. *Mathematical Programming*, 110, 337–371.
- ANJOS, M. F. et VANNELLI, A. (2006). A new mathematical-programming framework for facility-layout design. *INFORMS Journal on Computing*, 18, 111–118.
- AUDET, C., HANSEN, P., JAUMARD, B. et SAVARD, G. (1997). Links between linear bilevel and mixed 0-1 programming problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 93, 273–300.
- BENSON, H. Y., SEN, A., SHANNO, D. F. et VANDERBEI, R. (2006). Interior-point algorithms, penalty methods and equilibrium problems. *Computational Optimization and Applications*, 34, 155–182.
- BONGARTZ, I., CONN, A. R., GOULD, N. et TOINT, P. L. (1995). CUTE : Constrained and Unconstrained Testing Environment. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 21, 123–160.
- COLSON, B., MARCOTTE, P. et SAVARD, G. (2005). Bilevel programming : A survey. *4OR*, 3, 87–107.
- CONN, A. R., GOULD, N. I. M., ORBAN, D. et TOINT, P. L. (2000a). A primal-dual trust-region algorithm for non-convex nonlinear programming. *Mathematical Programming*, 87, 215–249.
- CONN, A. R., GOULD, N. I. M. et TOINT, P. L. (2000b). *Trust-Region Methods*. SIAM, Philadelphia, USA.
- COULIBALY, Z. et ORBAN, D. (2012). An ℓ_1 elastic interior-point method for mathematical programs with complementarity constraints. *SIAM Journal on Optimization*, 22, 187–211.
- CURATOLO, P.-R. et ORBAN, D. (2012). An elastic penalty method for mathematical programs with vanishing constraints. Cahier du GERAD G-2012-xx, GERAD, Montréal, QC, Canada. En préparation.

- DEMIGUEL, V., FRIEDLANDER, M. P., NOGALES, F. J. et SCHOLTES, S. (2005). A two-sided relaxation scheme for mathematical programs with equilibrium constraints. *SIAM Journal on Optimization*, 16, 587–609.
- DENNIS, J. E., J. et MORÉ, J. J. (1974). A characterization of superlinear convergence and its application to quasi-Newton methods. *Mathematics of Computation*, 28, 549–560.
- DOLAN, E. D. et MORÉ, J. J. (2002). Benchmarking optimization software with performance profiles. *Mathematical Programming*, 91, 201–213.
- DRUMMOND, L. M. G. et SVAITER, B. F. (1999). On Well Definedness of the Central Path. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 102, 223–237.
- EL-BAKRY, A. S., TAPIA, R. A. et ZHANG, Y. (1994). A study of indicators for identifying zero variables in interior-point methods. *SIAM Review*, 36, 45–72.
- EL-BAKRY, A. S., TAPIA, R. A. et ZHANG, Y. (1996). On the convergence rate of Newton interior-point methods in the absence of strict complementarity. 6, 157–167.
- FACCHINEI, F., JIANG, H. et QI, L. (1999). A smoothing method for mathematical programs with equilibrium constraints. *Mathematical Programming*, 85, 107–134.
- FERNANDEZ, D. et SOLODOV, M. (2010). Stabilized sequential quadratic programming for optimization and a stabilized Newton-type method for variational problems. *Mathematical Programming*, 125, 47–73.
- FERRIS, M. C. et PANG, J. S. (1997). Engineering and economic applications of complementarity problems. *SIAM Review*, 39, 669–713.
- FIACCO, A. V. et MCCORMICK, G. P. (1990). *Nonlinear Programming : Sequential Unconstrained Minimization Techniques*. No. 10 Classics in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, PA, seconde édition.
- FLETCHER, R. et LEYFFER, S. (1998). *User manual for filterSQP*. Dundee, DD14HN, Scotland, U.K.
- FORSGREN, A., GILL, P. E. et WRIGHT, M. H. (2002). Interior Methods for Nonlinear Optimization. *SIAM Review*, 44, 525–597.
- FOURER, R., GAY, D. M. et KERNIGHAN, B. W. (2002). *AMPL : A Modeling Language for Mathematical Programming*. Duxbury Press/Brooks/Cole Publishing Company, seconde édition.
- GAUVIN, J. (1977). A necessary and sufficient regularity condition to have bounded multipliers in nonconvex programming. *Mathematical Programming*, 12, 136–138.
- GAY, D. M. (1997). Hooking your solver to AMPL. Technical Report 97-4-06, Lucent Technologies Bell Labs Innovations, Murray Hill, NJ. www.ampl.com/REFS/HOOKING.

- GILL, P., MURRAY, W. et SAUNDERS, M. A. (2008). *User's Guide for SNOPT Version 7 : Software for Large-Scale Nonlinear Programming*. La Jolla, CA 92093-0112, USA.
- GILL, P. E., MURRAY, W. et SAUNDERS, M. A. (2005). SNOPT : An SQP Algorithm for Large-Scale Constrained Optimization. *SIAM Review*, 47, 99–131.
- GOULD, N. I. M. (1986). On the Accurate Determination of Search Directions for Simple Differentiable Penalty Functions. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 6, 357–372.
- GOULD, N. I. M., ORBAN, D., SARTENAER, A. et TOINT, P. L. (2001). Superlinear convergence of primal-dual interior point algorithms for nonlinear programming. *SIAM Journal on Optimization*, 11, 974–1002.
- GOULD, N. I. M., ORBAN, D. et TOINT, P. L. (2003). CUTeR and SifDec : A Constrained and Unconstrained Testing Environment, revisited. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 29, 373–394.
- GOULD, N. I. M., ORBAN, D. et TOINT, P. L. (2010). An Interior-Point ℓ_1 -Penalty Method for Nonlinear Optimization. Cahiers du GERAD G-2010-38, GERAD, Montréal, QC, Canada.
- HARWELL SUBROUTINE LIBRARY (2007). *A collection of Fortran codes for large-scale scientific computation*. AERE Harwell Laboratory, Harwell, Oxfordshire, England. www.cse.clrc.ac.uk/nag/hsl.
- HEINKENSCHLOSS, M., ULBRICH, M. et ULBRICH, S. (1999). Superlinear and quadratic convergence of affine-scaling interior-point Newton methods for problems with simple bounds without strict complementarity assumption. *Mathematical Programming*, 86, 615–635.
- HOCK, W. et SCHITTKOWSKI, K. R. (1981). *Test Examples for Nonlinear Programming Codes*, vol. 187 de *Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer.
- IZMAILOV, A. et SOLODOV, M. (2009). Examples of dual behaviour of Newton-type methods on optimization problems with degenerate constraints. *Computational Optimization and Applications*, 42, 231–264.
- JI, J. et POTRA, F. (1996). Tapia indicators and finite termination of infeasible-interior-point methods for degenerate LCP. M. S. J. Renegar et S. Smale, éditeurs, *Mathematics of Numerical Analysis*, AMS, Providence, RI, USA, no. 32 Lectures in Applied Mathematics. 443–454.
- JIANG, H. et RALPH, D. (2000). Smooth SQP methods for mathematical programs with nonlinear complementarity constraints. *SIAM Journal on Optimization*, 10, 779–808.

- JITTORNTRUM, K. et OSBORNE, M. R. (1980). A modified barrier function method with improved rate of convergence for degenerate problems. *The Journal of the Australian Mathematical Society*, 21, 305–329.
- KADRANI, A., DUSSAULT, J.-P. et BENCHAKROUN, A. (2009). A New Regularization Scheme for Mathematical Programs with Complementarity Constraints. *SIAM Journal on Optimization*, 20, 78–103.
- KANZOW, C., FACCHINEI, F. et FISCHER, A. (2000). On the identification of zero variables in an interior-point framework. *SIAM Journal on Optimization*, 10, 1058–1078.
- KELLEY, C. T. (1995). *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*. SIAM, Philadelphia, USA.
- KOJIMA, M., MIZUNO, S. et NOMA, T. (1990). Limiting Behavior of Trajectories Generated by a Continuation Method for Monotone Complementarity Problems. *Mathematics of Operations Research*, 15, pp. 662–675.
- KYPARISIS, J. (1985). On Uniqueness of Kuhn-Tucker Multipliers in Nonlinear programming. *Mathematical Programming*, 32, 242–246.
- LEYFFER, S. (2004). MacMPEC : AMPL collection of MPECs. www.mcs.anl.gov/~leyffer/MacMPEC.
- LEYFFER, S., LÓPEZ-CALVA, G. et NOCEDAL, J. (2006). Interior methods for mathematical programs with complementarity constraints. *SIAM Journal on Optimization*, 17, 52–77.
- LIN, G. H. et FUKUSHIMA, M. (2005). A Modified Relaxation Scheme for Mathematical Programs with Complementarity Constraints. *Annals of Operations Research*, 133, 63–84.
- LÓPEZ-CALVA, G. (2005). *Exact-Penalty Methods for Nonlinear Programming*. Thèse de doctorat, Northwestern University, Evanston, Ill., USA.
- LU, T.-T. et SHIOU, S.-H. (2002). Inverses of 2×2 Block Matrices. *Computers & Mathematics with Applications*, 43.
- MANGASARIAN, O. L. (1994). *Nonlinear Programming*. No. 10 Classics in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, PA, seconde édition.
- MCCORMICK, G. P. et WITZGALL, C. (2001). Logarithmic SUMT limits in convex programming. *Mathematical Programming*, 90, 113–145.
- MEGIDDO, N. (1989). *Pathways to the optimal set in linear programming*. Progress in Mathematical Programming : Interior Point and Related Methods. Springer Verlag.
- MIFFLIN, R. (1975). Convergence bounds for nonlinear programming algorithms. *Mathematical Programming*, 8, 251–271.

- MONTEIRO, R. D. C. et ADLER, I. (1989a). Interior path following primal-dual algorithms. part I : Linear programming. *Mathematical Programming*, 44, 27–41.
- MONTEIRO, R. D. C. et ADLER, I. (1989b). Interior path following primal-dual algorithms. part II : Convex quadratic programming. *Mathematical Programming*, 44, 43–66.
- MONTEIRO, R. D. C. et TSUCHIYA, T. (1996). Limiting behavior of the derivatives of certain trajectories associated with a monotone horizontal linear complementarity problem. *Mathematics of Operations Research*, 21, 793–814.
- MONTEIRO, R. D. C. et WRIGHT, S. J. (1994). Local Convergence of Interior-Point Algorithms for Degenerate Monotone LCP. *Computational Optimization and Applications*, 3, 131–155.
- MORÉ, J. J., GARBOW, B. S. et HILLSTROM, K. E. (1981). Testing Unconstrained Optimization Software. *ACM Transaction on Mathematical Software*, 7, 17–41.
- NOCEDAL, J. et WRIGHT, S. J. (2006). *Numerical optimization*. No. 30 Springer series in Operation Research and Financial Engineering. Springer Science + Business Media, LLC, 233 Spring Street, New York, NY10013, USA, seconde édition.
- ORBAN, D. (2012). NLPy—A Large-Scale Optimization Toolkit in Python. Technical report Cahier du GERAD G-2012-xx, GERAD, Montréal, QC, Canada. En préparation.
- OUTRATA, J. V. (1999). Optimality conditions for a class of mathematical programs with equilibrium constraints. *Mathematics of Operations Research*, 24, 627–644.
- POTRA, F. (2001). Q-superlinear convergence of the iterates in primal-dual interior-point methods. *Mathematical Programming*, 91, 99–115.
- RAGHUNATHAN, A. U. et BIEGLER, L. T. (2005). An interior point method for mathematical programs with complementarity constraints (MPCCs). *SIAM Journal on Optimization*, 15, 720–750.
- RALPH, D. et WRIGHT, S. J. (2004). Some properties of regularization and penalization schemes for MPECs. *Optimization Methods and Software*, 19, 527–556.
- SCHEEL, H. et SCHOLTES, S. (2000). Mathematical programs with complementarity constraints : stationarity, optimality, and sensitivity. *Mathematics of Operations Research*, 25, 1–22.
- SCHITTKOWSKI, K. (1987). *More Test Examples for Nonlinear Programming Codes*. No. 282 Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer.
- SCHOLTES, S. (2001). Convergence properties of a regularization scheme for mathematical programs with complementarity constraints. *SIAM Journal on Optimization*, 11, 918–936.

- SILVESTER, D. et WATHEN, A. (1994). Fast iterative solution of stabilised Stokes systems part II : Using general block preconditioners. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 31, 1352–1367.
- STEihaug, T. (1983). The conjugate gradient method and trust regions in large scale optimization. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 20, 626–637.
- STOER, J. et WECHS, M. (1998). Infeasible-interior-point paths for sufficient linear complementarity problems and their analyticity. *Mathematical Programming*, 83, 407–423.
- VANDERBEI, R. (2008). *LOQO User's Manual - Version 4.05*. Princeton, New Jersey 08544, USA.
- WÄCHTER, A. (2009). Short tutorial : getting started with IPOPT in 90 minutes. IBM Research Report RC24790 (W0904-097).
- WÄCHTER, A. et BIEGLER, L. T. (2006). On the implementation of an Interior-Point Filter Line-Search Algorithm for Large-Scale Nonlinear Programming. *Mathematical Programming*, 106, 25–57.
- WALTZ, R., MORALES, J., NOCEDAL, J. et ORBAN, D. (2006). An interior algorithm for nonlinear optimization that combines line search and trust region steps. *Mathematical Programming*, 107, 391–408.
- WALTZ, R. A. et PLANTENGA, T. D. (2006). *KNITRO User's Manual : Version 5.0*. Ziena Optimization, Inc. www.ziena.com.
- WRIGHT, M. H. (1992). Interior methods for constrained optimization. *Acta Numerica*, 341–407.
- WRIGHT, M. H. (1995). Why a pure primal Newton barrier step may be infeasible. *SIAM Journal on Optimization*, 5, 1–12.
- WRIGHT, S. J. (2003). Constraint identification and algorithm stabilization for degenerate nonlinear programs. 95, 137–160.
- WRIGHT, S. J. et ORBAN, D. (2002). Properties of the Log-Barrier function on degenerate nonlinear programs. *Mathematics of Operations Research*, 27, 585–613.
- YE, Y. (2009). Lecture notes for course MS&E211. www.stanford.edu/class/msande211/lecture08.pdf.